ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«07» марта 2024 г.
Протокол №1

Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Математический буткемп»

Направление подготовки: *02.03.01 Математика и компьютерные науки*

Направленность (профиль) подготовки: *Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика»*

Квалификация (степень) выпускника: *бакалавр*

Форма обучения: *очная*

Срок освоения программы: *4 года*

Год набора: *2024*

Москва
2024

Электронный документ

Содержание

1. **Краткая характеристика дисциплины (модуля)** 3
2. **Перечень планируемых результатов обучения** 4
3. **Тематический план** 6
4. **Содержание дисциплины (модуля)** 6
5. **Учебно-методическое обеспечение** 7
6. **Материально-техническое обеспечение** 7
7. **Методические и оценочные материалы** 9

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Математический буткемп» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль «НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Математический буткемп» является основой для многих других математических дисциплин. Дисциплина (модуль) развивает аналитическое и критическое мышление, что является важным навыком для решения сложных задач в различных сферах.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль «НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика» и входит в Блок 1, часть, формируемую участниками образовательных отношений как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) изучается на 1 курсе в 1 семестре.

Цель изучения дисциплины (модуля): в формировании глубокого понимания LP, а также его применения в различных областях науки и техники.

Задачи изучения дисциплины (модуля) направлены на формирование у студентов следующий знаний, умений и навыков:

— знание основных понятия LP: целевая функция, ограничения, допустимая область, оптимальное решение;

— знание геометрической интерпретации задач LP (многогранники решений, крайние точки);

— знание теоремы двойственности и её экономическую интерпретацию;

— знание основных классов ILP-задач (полностью целочисленные, частично целочисленные);

— знание методов решения ILP: метод ветвей и границ, алгоритмы Гомори;

— умение формулировать задачи в стандартной форме LP и канонической форме;

— умение решать задачи LP симплекс-методом (вручную для простых случаев);

— умение работать с солверами (PuLP, Gurobi, CPLEX) для решения практических задач;

— умение строить двойственные задачи и интерпретировать двойственные переменные;

— умение применять метод ветвей и границ для решения ILP-задач средней сложности;

— владение анализом чувствительности решений к изменениям параметров модели;

— владение разработкой сложных оптимизационных моделей для реальных приложений;

— владение выбором оптимального солвера и настройкой его параметров для конкретной задачи;

— владение комбинированием методов LP и ILP для решения сложных комбинаторных задач;

— владение оптимизацией крупномасштабных моделей с использованием декомпозиционных методов.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
УК-1.	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1.	Знает методы поиска и анализа информации в области искусственного интеллекта, основные принципы критической оценки источников информации и их релевантности.
		УК-1.2.	Умеет критически оценивать источники информации и синтезировать данные из различных источников для решения задач, применять системный подход к анализу и решению комплексных проблем
		УК-1.3.	Имеет практический опыт работы с современными инструментами и технологиями для обработки информации, формулировании и структурировании задач на основе полученной информации
ОПК-1.	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1.	Знает основные концепции и теории в области математического анализа и смежных дисциплин; методы и подходы, используемые в различных областях математики
		ОПК-1.2.	Умеет применять математические методы для решения профессиональных задач
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт разработки и реализация математических моделей в профессиональной деятельности
ПК-1.	Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области	ПК-1.1.	Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов.

	математики и компьютерных наук	ПК-1.2.	Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты.
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач

3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Контактная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
		Лекции	Семинары (практические занятия)			
1	Введение в линейное программирование (LP)		10		14	Домашнее задание
2	Солверы		10		12	Домашнее задание
3	Задачи целочисленного линейного программирования (ILP)		10		12	Домашнее задание
	Зачет			8		
	Итого:		***30***	***8***	***38***	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		***76***				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		***2***				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Введение в линейное программирование (LP)	Формулировка задачи линейного программирования: целевая функция и ограничения. Геометрическая интерпретация и понятие допустимого множества. Основные методы решения: графический метод и метод симплекс
2	Солверы	Обзор популярных LP-солверов (например, CPLEX, Gurobi, GLPK). Внутренние алгоритмы солверов: симплекс, внутренние точки. Практическое использование солверов: формализация задачи, ввод данных, интерпретация результатов
3	Задачи целочисленного линейного программирования (ILP)	Отличия ILP от классического LP и особенности формулировки. Методы решения ILP: ветвление и границы (branch and bound), отсечение (cutting planes). Применения ILP в планировании, распределении ресурсов и оптимизации расписаний

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Константинова, Е. В. Теория графов: алгебраическая теория : учебник для вузов / Е. В. Константинова. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 123 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-20172-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/569211.

2. Скорубский, В. И. Математическая логика : учебник и практикум для вузов / В. И. Скорубский, В. И. Поляков, А. Г. Зыков. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 211 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01114-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/561076.

3. Дискретная математика : учебное пособие для вузов / под научной редакцией А. Н. Сесекина. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 85 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-21182-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/559511.

Дополнительная литература:

1. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Математические основы информатики. — М. : Вильямс, 2009. — 784 с.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

— столами и стульями;
— компьютерной техникой;
— специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и

обеспечением доступа к в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование"	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		

Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Математический буткемп» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как практические занятия, домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Участие в семинаре (аудиторная работа) – активная работа студента на семинаре, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии.

Для успешного участия в семинаре студентам рекомендуется заранее ознакомиться с темой обсуждения, прочитать необходимые материалы и подготовить вопросы. Важно активно слушать и вовлекаться в дискуссию, высказывая свои мнения и аргументируя их. При ответах на вопросы преподавателя стоит быть уверенным, четким и логичным, опираясь на изученный материал. Также полезно поддерживать диалог с однокурсниками, чтобы обогатить обсуждение и расширить свои знания.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Математический буткемп»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме ***зачета***, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине. Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

Десятибалльная оценка	**Пятибалльная оценка**	**Оценка за зачет**	**Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)**
10	Отлично	Зачтено	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
9	Отлично	Зачтено	
8	Отлично	Зачтено	
7	Хорошо	Зачтено	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный
6	Хорошо	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
5	Удовлетворительно	Зачтено	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	Зачтено	
3	Не сдан	Не зачтено	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	Не зачтено	
1	Не сдан	Не зачтено	

Дисциплина (модуль) «Математический буткемп» оценивается следующим образом:

Для получения «Зачета» нужно сдать 2 из 3 Домашних задания.

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные домашние задания

Домашнее задание 1

ЗАДАЧА 1

Задача о диете **1 балл**

В этой задаче турист составляет меню для однодневного похода.

Продукты У туриста есть выбор из четырех продуктов: рис, курица, брокколи и капуста. Стоимость и питательные свойства одной порции каждого продукта собраны в таблице. Турист может взять с собой целое число порций каждого продукта.

Продукт	Цена	Калорийность, ккал	Белок, гр	Клетчатка, гр
Рис	5	40	5	2
Курица	30	250	30	5
Брокколи	10	50	8	10
Капуста	4	10	4	9

Таблица 1. Цена и питательные свойства одной порции продукта

Баланс Дневной рацион туриста должен быть питательным и содержать:

- Не менее 2,000 килокалорий,
- Не менее 100 грамм белка,
- Не менее 50 грамм клетчатки.

Вопрос Сколько порций каждого продукта нужно взять туристу, чтобы составить сбалансированное меню минимальной стоимости?

ЗАДАЧА 2

Задача о рюкзаке **1 балл**

Рассмотрим классическую задачу компьютерных наук — задачу о рюкзаке.

Предметы У нас есть набор из n неделимых предметов, у каждого из которых есть положительный вес $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ и положительная ценность $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Каждый предмет доступен в одном экземпляре.

Рюкзак У нас есть рюкзак, который может выдержать набор предметов весом не более W.

Рисунок 1. Иллюстрация задачи

Вопрос Какие предметы положить в рюкзак, чтобы унести максимальную ценность?

ЗАДАЧА 3

Задача о задачах **2 балла**

В этой задаче мы рассмотрим фриланс-платформу, на которой есть есть n задач и n исполнителей.

Доходы Решение задачи j принесет фриланс-платформе доход p_j.

Расходы Исполнитель $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ готов выполнить задачу $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ за вознаграждение c_{ij}.

Нагрузка Один исполнитель может взять не более двух задач.

Вопрос Как оптимально распределить задачи по исполнителям?

Подсказка: Имей в виду, что платформа может отказаться от решения задачи, если это не выгодно. В этом случае платформа не получает дохода и не несет расхода.

ЗАДАЧА 4

Логистика **3 балла**

Компания «X» занимается доставкой питьевой воды в офисы и выходит в новый город.

Клиенты В этом городе есть m клиентов с еженедельной потребностью в $\texttt{demand}_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ партий воды. Запрос каждого клиента должен быть удовлетворен полностью.

Склады Чтобы начать работу, компании «X» нужно арендовать склады — места, где будут храниться запасы воды, которые потом будут доставляться до клиентов. В качестве локаций складов компания рассматривает n вариантов. Каждая локация характеризуется двумя параметрами:

- Стоимостью недельной аренды склада $\texttt{fixed_cost}_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,
- Вместимостью склада в партиях воды $\texttt{capacity}_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Операционная модель Компания работает так: в течение недели склады постепенно пополняются, а в понедельник утром вся вода единовременно отправляется клиентам. Один склад может обслуживать несколько клиентов, а один клиент может получать воду из разных складов. Доставка одной партии воды из склада в локации i до офиса j стоит $\texttt{variable_cost}_{ij}$.

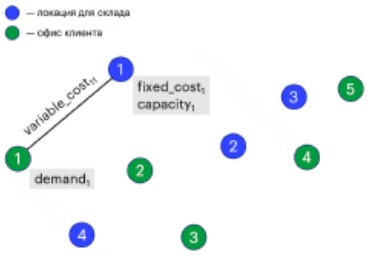

Рисунок 2. Иллюстрация задачи

Вопрос В каких локациях компании «X» выгодно арендовать склады?

Подсказка: Подумай, из чего складываются общие расходы компании? Какие переменные тебе нужны, чтобы моделировать эти расходы?

ЗАДАЧА 5

Переезд в офис **3 балла**

Эта задача отличается от предыдущих тем, что для ее решения понадобится оптимизация *нелинейной* целевой функции.

Компания «T» переезжает в новый офис и перед менеджментом стоит задача — определить, где будет сидеть каждая команда. Главная сложность этой задачи в том, что при любой рассадке находятся недовольные команды, которые хотели сидеть рядом, а оказались далеко друг от друга. Попробуем найти оптимальную рассадку команд.

Команды и места Будем считать, что в «T» работает m команд $\{1, 2, ..., m\}$ и в новом офисе есть ровно m мест $\{1, 2, ..., m\}$.

Расстояние Будем обозначать расстояние между местами j и j' как $d_{jj'}$. Условно, расстояние можно измерять в минутах, которые нужно потратить, чтобы дойти от места j до j'.

Ценность коммуникации Команды часто жалуются на то, что сидят далеко от тех, с кем им нужно взаимодействовать. Опросим руководителей команд и для каждой пары команд (i, i') определим ценность коммуникации $c_{ii'}$.

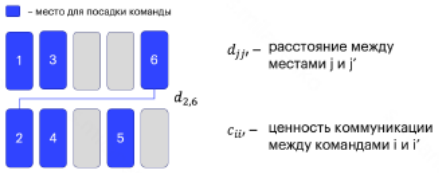

Рисунок 3. Иллюстрация задачи

Вопрос Как рассадить команды на места в офисе, чтобы обеспечить эффективную коммуникацию?

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

В этом разделе собраны теоретические задачи, которые требуют рассуждения. В качестве ответа приведи аккуратное обоснование.

ЗАДАЧА 6 **Квадратичная задача** **1 балл**

Рассмотрим задачу оптимизации

$$\min_x \sum_{i=1}^{n} (a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i)$$
$$\text{subject to } x_i \in \{0, 1\}, \ \forall i \in [n]$$

Придумай способ решения этой задачи без использования специализированных алгоритмов.

ЗАДАЧА 7 **Лишние продукты** **1 балл**

Посмотри на условие первой задачи (задача о диете). Без решения задачи оптимизации найди продукт, который точно не войдет в оптимальную диету. Объясни почему.

ЗАДАЧА 8 **Ограничения** **3 балла**

Рассмотрим стандартную формулировку задачи ILP:

$$\min_{x \in \mathbb{Z}^d} c^T x$$
$$\text{subject to } Gx \leqslant h.$$

Эта формулировка хорошо поддерживает ограничения типа AND. Например, если нам нужно добавить ограничение:

$$x_i \geqslant 5 \quad \text{AND} \quad x_i \leqslant 7,$$

то нам нужно просто добавить два линейных ограничения в задачу (расширить матрицу G и вектор h):

$$-x_i \leqslant -5$$
$$x_i \leqslant 7.$$

Представь, что нам нужно добавить в задачу ограничение типа OR:

$$x_i \in [0; 5] \quad \text{OR} \quad x_i \in [7; 10].$$

Как это сделать?

Подсказка: Тебе могут понадобиться дополнительные переменные оптимизации.

Домашнее задание 2

Пункт 1 **0.5 балла**

Перепиши задачу (1) в каноническом виде целочисленного линейного программирования:

$$\begin{aligned} \underset{x \in \{0,1\}^{\mathbf{dim}}}{\text{maximize}} \quad & \langle c, x \rangle \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq b, \end{aligned}$$

где x это вектор, полученный за счет конкатенации строк матрицы X. Тебе нужно задать A, b, c и **dim**.

Пункт 2 **4 балла**

Докажи, что матрица A, полученная тобой в предыдущем пункте, выполняет свойство TU (totally unimodular).

Определение Матрица выполняет свойство TU (totally unimodular matrix) если любая ее квадратная подматрица имеет определитель -1, 0 или 1.

Набросок доказательства[2]

Докажем утверждение с помощью индукции по размеру квадратной подматрицы в определении свойства TU.

База индукции

Проверь, что для каждой подматрицы A' размера 1×1 свойство TU выполняется.

Шаг индукции

Пусть свойство TU выполняется для всех квадратных подматриц размера $k \times k$. Покажем, что оно также выполняется для подматриц размера $(k+1) \times (k+1)$. Для этого рассмотрим произвольную подматрицу M размера $(k+1) \times (k+1)$. Заметим, что матрица M принадлежит одному из трех типов:

- *Тип 1.* В матрице M есть столбец, состоящий целиком из нулей.
- *Тип 2.* В матрице M есть столбец, состоящий из k нулей и одного ненулевого элемента.
- *Тип 3.* Каждый столбец матрицы M имеет ровно два ненулевых элемента.

Аккуратно докажи, что возможны только эти три типа. Дальше для каждого из типов проанализируй определитель матрицы M и докажи, что матрица M удовлетворяет свойству TU.

Подсказка 1. При исследования типа 2 воспользуйся свойством, что перестановка строк матрицы меняет только знак определителя.

Подсказка 2. При исследования типа 3 сложи строки матрицы. Вспомни, что если строки матрицы линейно зависимы, то определитель такой матрицы равен нулю.

Пункт 3 **0.5 балла**

Примени теорему о Totally Unimodular Matrix из лекции и запиши LP-релаксацию задачи, решение которой дает решение исходной задачи ILP (1).

[2] Твоя задача — аккуратно восстановить доказательство.

2 Задание на программирование [5 баллов]

В этой задаче тебе предстоит реализовать алгоритм Branch and Bound для решения судоку. В этой задаче судоку определяется двумерным массивом размера 9×9. Например,

```
puzzle = [[4, 8, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0],
          [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 7, 1],
          [0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
          [7, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 6, 0],
          [0, 0, 0, 2, 0, 0, 8, 0, 0],
          [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
          [0, 0, 1, 0, 7, 6, 0, 0, 0],
          [3, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 0],
          [0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0]],
```

Нулевые элементы обозначают клетки, которые должны быть заполнены твоим алгоритмом, а остальные числа (от 1 до 9) обозначают клетки, которые заполнены по условию. Твоя функция `solve_sudoku` должна возвращать tuple `(solved_puzzle, constraints)`, где `solved_puzzle` это решенная задача судоку, а `constraints` это дополнительные ограничения, которые позволяют алгоритму Branch and Bound найти целочисленное решение. Например, для задачи выше решение будет выглядеть так:

```
solved_puzzle = [[4, 8, 7, 3, 1, 2, 6, 9, 5],
                 [5, 9, 3, 6, 8, 4, 2, 7, 1],
                 [1, 2, 6, 5, 9, 7, 3, 8, 4],
                 [7, 3, 5, 8, 4, 9, 1, 6, 2],
                 [9, 1, 4, 2, 6, 5, 8, 3, 7],
                 [2, 6, 8, 7, 3, 1, 5, 4, 9],
                 [8, 5, 1, 4, 7, 6, 9, 2, 3],
                 [3, 7, 9, 1, 2, 8, 4, 5, 6],
                 [6, 4, 2, 9, 5, 3, 7, 1, 8]]

constraints = [(8, 5, 2, 1), (5, 3, 4, 1)].
```

Значение переменной `constraints` означает, что если мы добавим два ограничения $(x_{8,5})_2 = 1$ и $(x_{5,3})_4 = 1$, то LP-релаксация задачи целочисленного линейного программирования (см. детали ниже) даст целочисленное решение. Обрати внимание, что разные дополнительные ограничения могут приводить к одному и тому же решению.

Решение задачи состоит из двух ключевых шагов, которые мы сейчас обсудим.

Шаг 1. Решение LP-релаксации

Ключевой компонент алгоритма Branch and Bound — симплекс метод, который решает задачу LP-релаксации. Используя библиотеку `cvxpy`, напиши функцию, которая решает LP-релаксацию задачи судоку. Подробнее про `cvxpy` можно прочитать в документации `http://cvxpy.org`.

На лекции мы обсудили, что в задаче судоку мы работаем с переменными $\{(x_{i,j})_k : i \in [9], j \in [9], k \in [9]\}$. Переменная $(x_{i,j})_k$ равна 1 тогда и только тогда, когда в клетке (i,j) записано число k.[3] В этих обозначениях LP-релаксация задачи судоку выражается следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{i,j}^{9} \max_k (x_{i,j})_k \\
\text{subject to} \quad & (x_{i,j})_k \in [0,1] \quad i,j,k = 1...9 && \text{(релаксация бинарных ограничений)} \\
& \sum_{k=1}^{9} (x_{i,j})_k = 1, \quad i,j = 1...9 && \text{(в каждой клетке записано одно число)} \\
& \sum_{j=1}^{9} (x_{i,j})_k = 1, \quad i,k = 1...9 && \text{(числа в строках не повторяются)} \\
& \sum_{i=1}^{9} (x_{i,j})_k = 1, \quad j,k = 1...9 && \text{(числа в столбцах не повторяются)} \\
& \sum_{m,l=1}^{3} (x_{i+m,j+l})_k = 1, \quad i,j \in \{0,3,6\}, k = 1...9 && \text{(числа в 9 квадратах не повторяются)} \\
& (x_{i,j})_k = 1 \ \text{ для } (i,j) \text{ заполненных в условии} && \text{(фиксируем значения клеток из условия).}
\end{aligned}
$$

Важно: Даже когда LP-релаксация теоретически дает целочисленное решение, результаты, которые ты получишь на практике, могут не быть целочисленными. Например, вместо 1 ты можешь получить 0.999995. В этом задании ты можешь округлять числа в ε-окрестности 0 и 1, где $\varepsilon = 0.005$.

Бонусные очки Ты можешь получить 1 бонусный балл, если самостоятельно проанализируешь целевую функцию задачи LP-релаксации и объяснишь ее выбор (либо предложишь другой, более оптимальный выбор целевой функции).

Шаг 2. Branch and Bound

Реализуй алгоритм Branch and Bound для решения судоку.

Подсказка: В случае если LP-релаксация не дает целочисленного решения, эффективно фиксировать значение той переменной $\{(x_{(i,j)})_k : i,j,k = 1,...,9\}$, чье текущее значение лежит ближе всего к 0.5.

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1.	Найди предел $\lim\limits_{x\to 3}(3x+1)$ **Ответ запиши в виде десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.**	10/ 10.00	ПК-1
2.	Последовательность задана уравнением: $a_n = -n^3 + 5$. Является ли она: 1. возрастающей; 2. убывающей; не монотонной.	2	УК-1
3.	Найди точку разрыва функции $f(x) = \frac{x^2-1}{\lvert x+1\rvert}$ 1. $x = 1$; 2. $x = -1$; 3. $x = 1$ и $x = -1$; Функция непрерывна.	2	ПК-1
4.	Пусть задан вектор $u = (1,3)$. Выбери из списка все векторы, которые ортогональны к u: 1. $(3,-1)$; 2. $(-5,10)$; 3. $(2,2)$; $(-3,1)$.	1 и 4/ 14/ 41/1,4/ 4,1	ОПК-1
5.	Найди косинус угла между векторами: $u = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ **Ответ запиши в виде десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.**	0.6/ 0.60	ПК-1
6.	Выясни, какой из векторов длиннее: $v_1 = 5e_1 - e_2$ или $v_2 = 4e_1 + 3e_2$ Здесь e_1 и e_2 — ортонормированный базис. В ответ введи номер искомого вектора: 1 или 2.	1	ОПК-1