ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«07» марта 2024 г.
Протокол №1

Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Теория стохастического оптимального управления»

Направление подготовки: *02.03.01 Математика и компьютерные науки*

Направленность (профиль) подготовки: *Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика»*

Квалификация (степень) выпускника: *бакалавр*

Форма обучения: *очная*

Срок освоения программы: *4 года*

Год набора: *2024*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0215B0C000D1B3FEB44A37EE631E0C27D4
Владелец: Ивашкевич Евгений Васильевич
Действителен: с 13.01.2026 до 13.04.2027

Электронный документ

Москва
2024

Содержание

1. **Краткая характеристика дисциплины (модуля)** 3
2. **Перечень планируемых результатов обучения** 3
3. **Тематический план** 7
4. **Содержание дисциплины (модуля)** 8
5. **Учебно-методическое обеспечение** 9
6. **Материально-техническое обеспечение** 9
7. **Методические и оценочные материалы** 11

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Теория стохастического оптимального управления» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Теория стохастического оптимального управления» обеспечивает глубокое понимание стохастических процессов, которые лежат в основе современных математических моделей, используемых для анализа неопределённости и случайности в сложных системах. Эта дисциплина способствует развитию навыков компьютерного моделирования и симуляции случайных явлений, что критично для применения в областях, таких как финансовый анализ, машинное обучение, оптимизация алгоритмов и обеспечение информационной безопасности, где точные предсказания и управление рисками невозможны без учёта стохастических факторов.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика» и входит в вариативную часть Блока 1, формируемую участниками образовательных отношений, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) доступна для изучения на 3 или 4 курсе в 6, 7, 8 семестрах на выбор после успешного освоения дисциплин (модулей): «Математический анализ. Часть 1», «Математический анализ. Часть 2» и «Линейная алгебра и геометрия. Часть 1», «Линейная алгебра и геометрия. Часть 2» или «Математический анализ. Продвинутый уровень. Часть 1», «Математический анализ. Продвинутый уровень. Часть 2» и «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 1», «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 2».

Цель изучения дисциплины (модуля): формирование у студентов фундаментальных знаний о математических моделях стохастических процессов, включая методы анализа и решения стохастических дифференциальных уравнений, для применения в задачах компьютерного моделирования.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

— ознакомить студентов с основными понятиями и методами стохастического анализа, включая Теория стохастического оптимального управления и их свойства;

— развить умения формулировать и решать задачи моделирования случайных процессов в различных прикладных областях, таких как финансовая математика и машинное обучение;

— обучить применению численных методов и компьютерных технологий для симуляции и анализа стохастических систем;

— сформировать навыки критической оценки и интерпретации результатов стохастического моделирования с учётом особенностей стохастических процессов.

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

— основные принципы оптимального управления в стохастических системах, включая постановки задач с дискретным и непрерывным временем, конечным и бесконечным горизонтом;

— уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана (HJB): связь со стохастическими дифференциальными уравнениями и нелинейными уравнениями в частных производных;

— основы динамического программирования: принцип оптимальности Беллмана и его применения для дискретных и непрерывных систем;

— ключевые теоремы: принцип максимума Понтрягина, теоремы о разделении (separation theorem) и принцип определенной эквивалентности (certainty equivalence principle);

— применения в финансах и экономике (управление портфелем, задача Мертона) и современных областях (моделирование в страховании, управления робототехническими;

уметь:

— формулировать и решать задачу стохастического оптимального управления для систем, описываемых СДУ, в том числе использовать метод динамического программирования для построения оптимальных стратегий;

— выводить и решать уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана (HJB) для простых случаев (LQG-задача, задача управления портфелем);

— применять принцип максимума Понтрягина для получения необходимых условий оптимальности в стохастических системах;

— анализировать устойчивость решений СДУ и применять методы стохастической оптимизации для систем с полной и неполной информацией;

— вычислять чувствительность решений, использовать методы аппроксимации для задач большой размерности (приближенное динамическое программирование);

владеть:

— методами динамического программирования и принципа максимума для поиска синтеза оптимального управления в стохастических системах;

— аппаратом стохастического исчисления Ито для анализа управляемых диффузионных процессов;

— навыками работы с линейно-квадратично-гауссовскими задачами (LQG) и их численной реализацией в Python/MATLAB;

— методами анализа сходимости и построения аппроксимаций (например, для задач с большим пространством состояний);

— терминологией и подходами современной теории стохастического управления (including robust control).

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
УК-1.	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1.	Знает методы поиска и анализа информации в области искусственного интеллекта, основные принципы критической оценки источников информации и их релевантности.
		УК-1.2.	Умеет критически оценивать источники информации и синтезировать данные из различных источников для решения задач, применять системный подход к анализу и решению комплексных проблем
		УК-1.3.	Имеет практический опыт работы с современными инструментами и технологиями для обработки информации, формулировании и структурировании задач на основе полученной информации
УК-2.	Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2.1.	Знает действующие правовые нормы, регулирующие деятельность в области решения задач, основные методы и подходы к определению круга задач
		УК-2.2.	Умеет определять круг задач в рамках поставленной цели, выбирать оптимальные способы решения задач, учитывая имеющиеся ресурсы и ограничения
		УК-2.3.	Имеет практический опыт применения знаний о правовых нормах и ресурсах в реальных ситуациях, разработки и реализации решений в соответствии с установленными ограничениями
ОПК-1.	Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики	ОПК-1.1.	Знает основные методы и подходы к решению задач прикладной и компьютерной математики, включая алгоритмы, математическое моделирование и теорию оптимизации, а также современные инструменты и технологии, используемые в этой области
		ОПК-1.2.	Умеет анализировать и формулировать математические

			задачи, применять соответствующие методы и алгоритмы для их решения, а также интерпретировать и представлять результаты в понятной и доступной форме
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт работы над проектами или исследованиями в области прикладной и компьютерной математики, включая участие в конкурсах, олимпиадах или научных публикациях, где были решены актуальные и значимые задачи
ПК-1.	Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области математики и компьютерных наук	ПК-1.1.	Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов.
		ПК-1.2.	Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты.
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач
ПК-2.	Способен решать типовые задачи профессиональной деятельности в области искусственного интеллекта, опираясь на информационную и библиографическую культуру, используя информационно-коммуникационные технологии и учитывая основные требования информационной безопасности	ПК-2.1.	Знает основы информационной и библиографической культуры, а также принципы информационной безопасности и применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности
		ПК-2.2.	Умеет эффективно использовать информационно-коммуникационные технологии для решения стандартных задач профессиональной деятельности, учитывая требования информационной безопасности
		ПК-2.3.	Имеет опыт работы с информационными ресурсами и технологиями в области искусственного интеллекта, включая соблюдение норм информационной безопасности

3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Аудиторная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
		Лекции	Семинары			
1	Динамическое программирование	5	5		20	Домашнее задание, аудиторная работа
2	Непрерывное время и HJB	5	5	2	20	Домашнее задание, аудиторная работа Контрольная работа
3	LQG и принцип максимума	5	5		20	Домашнее задание, аудиторная работа
4	Применения в финансах	5	5		20	Домашнее задание, аудиторная работа
5	Неполная информация и устойчивость	6	6	2	20	Домашнее задание, аудиторная работа
6	Оптимальная остановка и приближения	2	2	2	10	Домашнее задание, аудиторная работа Контрольная работа
7	Применение стохастического оптимального управления	2	2		10	Домашнее задание, аудиторная работа
	Зачет с оценкой			4		Коллоквиум
	Итого:	***30***	***30***	***10***	***120***	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		***190***				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		***5***				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Динамическое программирование	Принцип оптимальности Беллмана Дискретные задачи. Уравнение Беллмана
2	Непрерывное время и HJB	Управляемые СДУ. Формула Ито Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана (HJB)
3	LQG и принцип максимума	Линейно-квадратичный регулятор (LQR). LQG. Уравнение Риккати Стохастический принцип максимума Понтрягина
4	Применения в финансах	Задача Мертона об оптимальном портфеле
5	Неполная информация и устойчивость	Теорема о разделении. Фильтр Калмана. Устойчивость стохастических систем
6	Оптимальная остановка и приближения	Уравнение для задачи остановки. Примеры Approximate Dynamic Programming Робастное управление. H∞-подход.
7	Применение стохастического оптимального управления	Управление портфелем или роботом Сравнительный анализ методов. Применение в финансах и робототехнике

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Аверина, Т. А. Алгоритмы статистического моделирования решений стохастических дифференциальных уравнений и систем со случайной структурой : учебное пособие / Т. А. Аверина. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2025. - 288 с. – ISBN 978-5-9729-2443-1. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.ru/catalog/product/2226612.

2. Круглов, В. М. Случайные процессы в 2 ч. Часть 1. Основы общей теории : учебник для вузов / В. М. Круглов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 276 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01748-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/536889.

3. Круглов, В. М. Случайные процессы в 2 ч. Часть 2. Основы стохастического анализа : учебник для вузов / В. М. Круглов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 280 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02086-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/537767.

Дополнительная литература:

1. Ширяев, А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1 : Факты, модели: В 2 т.: Сборник научных трудов / Ширяев А.Н. - Москва :МЦНМО, 2016. - 440 с.: ISBN 978-5-4439-2391-5. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/970044

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;

— специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование"	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модуле), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное

Электронный документ

Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Теория стохастического оптимального управления» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекции, семинары, аудиторная работа, домашние задания, контрольная работа, коллоквиум, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удается, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар – это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с

требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Аудиторная работа – активная работа студента на семинаре или лекции, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии.

Для успешного участия в аудиторной работе студентам рекомендуется заранее ознакомиться с темой обсуждения, прочитать необходимые материалы и подготовить вопросы. Важно активно слушать и вовлекаться в дискуссию, высказывая свои мнения, аргументируя их. При ответах на вопросы преподавателя стоит быть уверенным, четким и логичным, опираясь на изученный материал. Также полезно поддерживать диалог с однокурсниками, чтобы обогатить обсуждение и расширить свои знания.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы – получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины и продемонстрировать навыки их практического применения.

Коллоквиум – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее.

В процессе подготовки к коллоквиуму необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модуле) «Теория стохастического оптимального управления»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме ***зачета с оценкой***, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в силлабусе дисциплины:

Десятибалльная оценка	**Пятибалльная оценка**	**Оценка за зачет**	**Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)**
10	Отлично	Зачтено	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает
9	Отлично	Зачтено	
8	Отлично	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Зачтено	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	Зачтено	
5	Удовлетворительно	Зачтено	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные
4	Удовлетворительно	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
3	Не сдан	Не зачтено	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	Не зачтено	
1	Не сдан	Не зачтено	

Дисциплина (модуль) «Теория стохастического оптимального управления» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	25%	10	Набор задач по темам недели
Аудиторная работа	15%	15	Аудиторная работа – активная работа студента на семинаре или лекции.
Контрольная работа	35%	2	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Зачет с оценкой	25%	1	Коллоквиум - устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее.

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Теория стохастического оптимального управления»: «0,25 × среднее за домашние задания + 0,15 × среднее за аудиторную работу + 0,35 × среднее за контрольные работы + 0,25 × зачет с оценкой».

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модуле)
Примерные домашние задания
Домашнее задание 1

1. **Принцип максимума Понтрягина.** Сравните принцип максимума Понтрягина с методом HJB. Для детерминированного случая управления выведите условия оптимальности и объясните, как они переносятся на стохастические системы. Приведите пример задачи быстродействия и решите ее с помощью принципа максимума.
2. **Принцип максимума Понтрягина.** Для стохастической системы dXt=utdt+dWt, целевой функции E[∫0T(Xt2+ut2)dt], выведите сопряженную систему и условия оптимальности. Приведите численный пример решения на конечном интервале.
3. **Линейно-квадратичное управление.** Постановьте задачу LQG: линейная система dXt=(AXt+But)dt+CdWt, квадратичная целевая функция. Решите через HJB, объяснив разделение. Приведите пример из робототехники и реализуйте управление с обратной связью.
4. **Линейно-квадратичное управление.** Для финансового примера (управление портфелем) с шумом наблюдения решите LQG. Объясните связь с фильтром Калмана и реализуйте численное решение на Python (предоставьте код и анализ результатов).

5. **Модель Мертона.** В модели Мертона для оптимального управления портфелем (риск vs доходность) выведите эллиптическое уравнение Беллмана на бесконечном горизонте. Рассчитайте оптимальное распределение активов для простых параметров ($\mu=0.1$, $\sigma=0.2$, $r=0.05$, коэффициент риска Аверса 2). Приведите численный пример и обсудите границу эффективности.

Домашнее задание 3

1. **Стохастические дифференциальные игры.** Постановьте задачу для двух игроков в стохастической игре: система $dX_t=(u_t-v_t)dt+dW_t$, целевые функции $E[\int_0^T(X_t^2+u_t^2-v_t^2)dt]$. Определите равновесие Нэша и выведите уравнение Беллмана для игр. Приведите пример конкуренции фирм на рынке.
2. **Стохастические дифференциальные игры.** Для примера с двумя игроками решите задачу численно, моделируя равновесие Нэша. Объясните, как стохастические игры связаны с управлением с неполной информацией, и реализуйте простую симуляцию на Python.
3. **Управление с неполной информацией.** Опишите фильтр Калмана для линейной системы с шумом наблюдения. Примените к задаче слежения за движущимся объектом: система $dX_t=u_t dt+dW_t$, наблюдение $dY_t=X_t dt+dV_t$. Выведите уравнения фильтра и приведите численный пример.
4. **Управление с неполной информацией.** Для POMDP (частично наблюдаемые марковские процессы) объясните оптимальную политику. Приведите пример из навигации и обсудите связь с принципом максимума Понтрягина. Реализуйте простое численное решение на Python.
5. **Эргодическое управление.** Для равномерно эргодической системы $dX_t=(u_t-X_t)dt+dW_t$ выведите эргодическое уравнение Беллмана для управления "в среднем". Приведите пример из экономики (управление запасами) и рассчитайте среднюю стоимость для стационарной политики. Объясните связь с бесконечным горизонтом.

Примерные задания для семинаров

1. Что такое стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ) и как оно отличается от обычного дифференциального уравнения?
2. Приведите пример управляемого процесса, связанного с управлением портфелем инвестиций.
3. Как связаны СДУ с уравнениями в частных производных (УрЧП) в контексте задач оптимизации?
4. Опишите основные компоненты задачи стохастического управления: состояние, управление и целевую функцию.
5. Приведите пример задачи управления ресурсами, где используется СДУ.
6. Что такое марковское свойство в контексте управляемых стохастических процессов?
7. Как броуновское движение используется в моделях стохастического управления?
8. Объясните понятие "оптимального управления" в стохастической среде.
9. Приведите пример, где неполная информация влияет на выбор управления в СДУ.
10. Как связаны принципы стохастического управления с задачами из финансовой математики?

Примерные задания для контрольной работы

1. **Введение в стохастическое управление.** Определите стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ) и объясните его ключевые компоненты. Приведите пример управляемого процесса для задачи управления ресурсами, записав СДУ в явном виде и обосновав его связь с уравнениями в частных производных.

2. **Введение в стохастическое управление.** Рассмотрите задачу управления портфелем: рисковый актив $dSt=\mu Stdt+\sigma StdWt$, безрисковый с доходностью r. Запишите СДУ для капитала $dXt=(rXt+ut(\mu-r))dt+ut\sigma dWt$. Объясните, как марковское свойство влияет на выбор управления.

3. **Динамическое программирование.** Для управляемого диффузионного процесса на интервале [0, T] выведите параболическое уравнение Беллмана. Интерпретируйте функцию стоимости и принцип оптимальности. Приведите численный пример решения простой задачи с квадратичной функцией затрат.

4. **Динамическое программирование.** Решите задачу управления инвестициями: целевая функция $E[\int 0Tut2dt+XT2]$, где $dXt=(rXt+ut(\mu-r))dt+ut\sigma dWt$. Выведите уравнение Беллмана и опишите шаги нахождения оптимального управления.

5. **Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана.** Для задачи с квадратичной функцией затрат (линейно-квадратичное управление) выведите HJB-уравнение. Объясните алгоритм Беллмана–Ховарда и реализуйте численное решение на Python с использованием scipy (предоставьте ключевые фрагменты кода).

6. **Принцип максимума Понтрягина.** Сравните принцип максимума Понтрягина с методом HJB. Для детерминированного случая управления выведите условия оптимальности и объясните их перенос на стохастические системы. Приведите пример задачи быстродействия и решите ее.

7. **Принцип максимума Понтрягина.** Для системы $dXt=utdt+dWt$, целевой функции $E[\int 0T(Xt2+ut2)dt]$, выведите сопряженную систему и условия оптимальности. Приведите численный расчет для T=1.

8. **Линейно-квадратичное управление.** Постановьте задачу LQG: линейная система $dXt=(AXt+But)dt+CdWt$, квадратичная целевая функция. Решите через HJB и объясните разделение. Приведите пример из робототехники.

9. **Численные методы.** Сравните алгоритм Беллмана–Ховарда для эллиптических уравнений и метод конечных разностей для HJB. Реализуйте простое численное решение на Python для задачи из темы 5 (предоставьте код и анализ сходимости).

Примерные задания для коллоквиума

1. Что такое постановка задачи в стохастических дифференциальных играх?
2. Как определяется равновесие Нэша в стохастических системах?
3. Приведите пример конкуренции фирм на рынке как стохастической игры.
4. Что такое "игрок" в контексте стохастических дифференциальных игр?
5. Как выводится уравнение Беллмана для игр?
6. Приведите пример, где равновесие Нэша приводит к оптимальному управлению.
7. Как численно моделировать стохастические игры на Python?
8. Что такое "смешанная стратегия" в стохастических играх?
9. Приведите пример из экологии, где применяются стохастические игры.
10. Как стохастические игры связаны с управлением с неполной информацией?

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1	Укажите основное понятие, связанное со стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ) в теме введения в стохастическое управление.	Стохастическое дифференциальное уравнение	УК-1
2	Найдите количество основных компонентов в управляемом процессе из темы введения в стохастическое управление.	Три	УК-1

3	Укажите тип связи между СДУ и уравнениями в частных производных (УрЧП) из темы введения в стохастическое управление.	Итó	УК-1
4	Назовите пример задачи управления ресурсами из темы введения в стохастическое управление.	Управление портфелем	УК-1
5	Укажите временной интервал для управляемых диффузионных процессов в теме динамического программирования.	Конечный	УК-2
6	Найдите тип уравнения Беллмана в теме динамического программирования.	Параболическое	УК-2
7	Укажите принцип, используемый в выводе уравнения Беллмана из темы динамического программирования.	Оптимальности	УК-2
8	Назовите задачу, решаемую в практике темы динамического программирования.	Управление инвестициями	УК-2
9	Укажите алгоритм для параболических уравнений из темы уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (HJB).	Беллмана–Ховарда	ОПК-1
10	Найдите тип функции затрат в примерах темы HJB.	Квадратичная	ОПК-1
11	Укажите инструмент для численной реализации из темы HJB.	Python	ОПК-1
12	Назовите метод сравнения в теме принципа максимума Понтрягина.	HJB	ОПК-1
13	Укажите количество условий оптимальности в теме принципа максимума Понтрягина.	Два	ПК-1
14	Найдите пример задачи в теме принципа максимума Понтрягина.	Быстродействия	ПК-1
15	Укажите связь с детерминированным случаем из темы принципа максимума Понтрягина.	Перенос	ПК-1
16	Назовите постановку задачи в теме линейно-квадратичного управления.	LQG	ПК-2
17	Укажите метод решения в теме линейно-квадратичного управления.	HJB	ПК-2
18	Найдите приложение из темы линейно-квадратичного управления.	Робототехника	ПК-2
19	Укажите модель в теме модели Мертона.	Мертона	ПК-1
20	Найдите тип горизонта в теме модели Мертона.	Бесконечный	ПК-1