ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«07» марта 2024 г.
Протокол №1

Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Основы матричных вычислений»

Направление подготовки: *02.03.01 Математика и компьютерные науки*

Направленность (профиль) подготовки: *Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика»*

Квалификация (степень) выпускника: *бакалавр*

Форма обучения: *очная*

Срок освоения программы: *4 года*

Год набора: *2024*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0215B0C000D1B3FEB44A37EE631E0C27D4
Владелец: Ивашкевич Евгений Васильевич
Действителен: с 13.01.2026 до 13.04.2027

Электронный документ

Москва
2024

Содержание

1. **Краткая характеристика дисциплины (модуля)** 3
2. **Перечень планируемых результатов обучения** 5
3. **Тематический план** 7
4. **Содержание дисциплины (модуля)** 8
5. **Учебно-методическое обеспечение** 9
6. **Материально-техническое обеспечение** 10
7. **Методические и оценочные материалы** 11

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Основы матричных вычислений» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Основы матричных вычислений» необходимо, так как матричные операции лежат в основе многих алгоритмов машинного обучения, обработки данных и компьютерной графики, обеспечивая эффективное решение сложных вычислительных задач.

Эта дисциплина способствует развитию понимания численных методов и оптимизации, что критично для специалистов в области искусственного интеллекта, анализа больших данных и программного обеспечения, повышая их профессиональную компетентность и востребованность.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика» и входит в вариативную часть Блока 1 формируемую участниками образовательных отношений как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) является выборной и доступна для изучения на 3 или 4 курсе в 6, 7, 8 семестрах на выбор после успешного освоения дисциплин (модулей): «Математический анализ. Часть 1», «Математический анализ. Часть 2» и «Линейная алгебра и геометрия. Часть 1», «Линейная алгебра и геометрия. Часть 2» или «Математический анализ. Продвинутый уровень. Часть 1», «Математический анализ. Продвинутый уровень. Часть 2» и «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 1», «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень. Часть 2».

Цель изучения дисциплины (модуля): формирование у студентов фундаментальных навыков работы с матрицами и векторами для решения задач линейной алгебры, необходимых в прикладной математике и компьютерных технологиях.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

— изучить основные операции с матрицами, включая сложение, умножение, вычисление обратной матрицы и определителя, для понимания их свойств и использования в линейных системах;

— освоить численные методы решения матричных уравнений, такие как LU-разложение и сингулярное разложение, для анализа и решения задач с большой размерностью;

— проанализировать практические приложения матричных вычислений в машинном обучении, компьютерной графике и оптимизации, включая работу с векторами и тензорами в алгоритмах;

— реализовать матричные алгоритмы на языках программирования, например Python или MATLAB, для интеграции теоретических знаний в проекты по математике и компьютерным наукам.

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

— свойства и области применимости основных матричных разложений: SVD (включая теорему Эккарта-Янга-Мирского), QR, LU, Холецкого, скелетного разложения;

— численные методы поиска собственных значений и векторов: степенной метод, обратный степенной метод, метод сдвигов, QR-алгоритм, форма Хессенберга и их применение (например, PageRank);

— постановки задач неотрицательной факторизации (NMF) и матричного дополнения (matrix completion): мультипликативные правила Ли и Сонга, ALS, связь с вероятностными моделями, примеры (тексты, рекомендательные системы);

— крыловские методы и графовые приложения: итерации Арнольди, метод Ланцоша, GMRES; спектральное разбиение графа через матрицу смежности;

— определения и свойства нормальных матриц, спектральные теоремы для них; связь числа обусловленности с устойчивостью решения СЛАУ и регрессионных задач;

уметь:

— применять SVD для решения прикладных задач: вычисление псевдообратной матрицы, решение МНК (в том числе вырожденных и недоопределённых систем), понижение размерности, визуализация данных;

— реализовывать и выбирать подходящий метод для QR-разложения (Грамм-Шмидт, Хаусхолдер, Гивенс) в зависимости от требований к устойчивости и разреженности;

— строить метод главных компонент (PCA) через SVD выборочной ковариационной матрицы, интерпретировать главные компоненты для визуализации и выделения признаков;

— применять регуляризацию Тихонова для решения плохо обусловленных СЛАУ; использовать рандомизированные методы (случайные проекции, рандомизированный SVD) для больших матриц;

— моделировать зависимые многомерные нормальные случайные величины с заданной ковариационной матрицей, используя разложение Холецкого;

владеть:

— инструментарием матричного анализа для диагностики устойчивости: оценка числа обусловленности, выбор разложения в зависимости от свойств матрицы (симметричность, положительная определённость, разреженность), контроль точности результата;

— методами неотрицательной факторизации и матричного дополнения для работы с реальными разреженными данными (тексты, рекомендации) с использованием мультипликативных правил и ALS

Крыловскими подпространствами (итерации Арнольди, Ланцоша, GMRES) для решения больших разреженных СЛАУ, где прямые методы неприменимы;

— спектральными методами анализа графов для задачи спектрального разбиения графа на кластеры с пониманием ограничений (чувствительность к выбросам, выбор числа кластеров);

— навыком выбора между прямыми (LU, QR, SVD) и итерационными (Крыловские) методами решения СЛАУ в зависимости от размера, разреженности, числа обусловленности и требуемой точности, с пониманием ограничений каждого подхода.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
УК-1.	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1.	Знает методы поиска и анализа информации в области искусственного интеллекта, основные принципы критической оценки источников информации и их релевантности.
		УК-1.2.	Умеет критически оценивать источники информации и синтезировать данные из различных источников для решения задач, применять системный подход к анализу и решению комплексных проблем
		УК-1.3.	Имеет практический опыт работы с современными инструментами и технологиями для обработки информации, формулировании и структурировании задач на основе полученной информации
УК-2.	Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2.1.	Знает действующие правовые нормы, регулирующие деятельность в области решения задач, основные методы и подходы к определению круга задач
		УК-2.2.	Умеет определять круг задач в рамках поставленной цели, выбирать оптимальные способы решения задач, учитывая имеющиеся ресурсы и ограничения
		УК-2.3.	Имеет практический опыт применения знаний о правовых нормах и ресурсах в реальных ситуациях, разработки и реализации решений в соответствии с установленными ограничениями
ОПК-1.	Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики	ОПК-1.1.	Знает основные методы и подходы к решению задач прикладной и компьютерной математики, включая алгоритмы, математическое моделирование и теорию оптимизации, а также современные инструменты и технологии, используемые в этой области
		ОПК-1.2.	Умеет анализировать и формулировать математические

			задачи, применять соответствующие методы и алгоритмы для их решения, а также интерпретировать и представлять результаты в понятной и доступной форме
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт работы над проектами или исследованиями в области прикладной и компьютерной математики, включая участие в конкурсах, олимпиадах или научных публикациях, где были решены актуальные и значимые задачи
ПК-1.	Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области математики и компьютерных наук	ПК-1.1.	Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов.
		ПК-1.2.	Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты.
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач
ПК-2.	Способен решать типовые задачи профессиональной деятельности в области искусственного интеллекта, опираясь на информационную и библиографическую культуру, используя информационно-коммуникационные технологии и учитывая основные требования информационной безопасности	ПК-2.1.	Знает основы информационной и библиографической культуры, а также принципы информационной безопасности и применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности
		ПК-2.2.	Умеет эффективно использовать информационно-коммуникационные технологии для решения стандартных задач профессиональной деятельности, учитывая требования информационной безопасности
		ПК-2.3.	Имеет опыт работы с информационными ресурсами и технологиями в области искусственного интеллекта, включая соблюдение норм информационной безопасности

3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Аудиторная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
		Лекции	Семинары			
1	Введение. Основные понятия и определения	2	2		14	Домашнее задание Аудиторная работа
2	Разложения матриц	2	2		14	Домашнее задание Аудиторная работа
3	Нахождение собственных значений и векторов	2	4	2	14	Домашнее задание Аудиторная работа Контрольная работа
4	Метод главных компонент	4	4		14	Домашнее задание Аудиторная работа
5	Регуляризация	4	4		14	Домашнее задание Аудиторная работа
6	Рандомизированные матричные методы	4	4		14	Домашнее задание Аудиторная работа
7	Неотрицательная факторизация. Задача матричного дополнения.	4	4		14	Домашнее задание Аудиторная работа
8	Крыловские методы	4	4		14	Домашнее задание Аудиторная работа
9	Прикладные примеры. Графы	0	2	2	8	Домашнее задание Аудиторная работа Контрольная работа
	Зачет с оценкой			10		Итоговая работа
	Итого:	***26***	***30***	***14***	***120***	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		***190***				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		***5***				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Введение. Основные понятия и определения	Линейная зависимость. Ранг, ядро, образ. Нормы матриц. Собственные значения и собственные векторы. Нормальные матрицы. Спектральные теоремы. Число обусловленности.
2	Разложения матриц	Сингулярное разложение (SVD). Теорема Эккарта-Янга-Мирского. Скелетное разложение. Сингулярное разложение (SVD). Геометрический смысл. Псевдообратная матрица и метод наименьших квадратов. QR-разложение. Процесс Грамма-Шмидта. Отражения Хаусхолдера. Вращения Гивенса. Применение в МНК. LU-разложение. Решение СЛАУ с помощью LU-разложения. Симметричные положительно определённые матрицы. Разложение Холецкого. Квадратные корни. Моделирование зависимых случайных величин.
3	Нахождение собственных значений и векторов	Степенной метод, обратный степенной метод, метод сдвигов. Применение к PageRank. Контрольная работа 1 QR-алгоритм. Форма Хессенберга. QR-алгоритм со сдвигами.
4	Метод главных компонент	МГК через SVD-разложение. Выборочная ковариационная матрица. Визуализация, выделение признаков.
5	Регуляризация	Проблемы устойчивости. Число обусловленности СЛАУ. Регуляризация Тихонова.
6	Рандомизированные матричные методы	Метод случайных проекций. Рандомизированный SVD. Рандомизированные итерационные методы.
7	Неотрицательная факторизация. Задача матричного дополнения.	Постановки задач. Примеры из анализа текстов, рекомендательных систем. Мультипликативные правила обновления Ли и Сонга. ALS. Связь с вероятностной моделью скрытых факторов.
8	Крыловские методы	Итерации Арнольди и метод Ланцоша. GMRES.
9	Прикладные примеры. Графы	Графовые методы. Матрица смежности графа, спектральное разбиение графа. Контрольная работа 2

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Кремер, Н. Ш. Линейная алгебра : учебник и практикум для вузов / Н. Ш. Кремер, М. Н. Фридман, И. М. Тришин ; под редакцией Н. Ш. Кремера. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 422 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08547-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/582873

2. Воронов, М. В. Вычислительная математика : учебник для вузов / М. В. Воронов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 80 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-18512-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/589133

3. Шевцов, Г. С. Численные методы линейной алгебры : учебное пособие / Г. С. Шевцов, О. Г. Крюкова, Б. И. Мызникова. — 3-е изд. — Москва : ИНФРА-М, 2026. — 528 с. - ISBN 978-5-16-016796-1. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.ru/catalog/product/2211865

Дополнительная литература:

1. Пантелеев, А. В. Численные методы. Практикум : учебное пособие / А. В. Пантелеев, И. А. Кудрявцева. — Москва : ИНФРА-М, 2023. — 512 с. — (Высшее образование). - ISBN 978-5-16-018445-6. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/2002583

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

— столами и стульями;
— компьютерной техникой;
— механическими калькуляторами;
— специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование"	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модуле), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное

Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Основы матричных вычислений» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, аудиторная работа, контрольные работы и домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удается, следует сформулировать вопрос и задать его

преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Аудиторная работа – активная работа студента на семинаре, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии.

Для успешного участия в семинаре студентам рекомендуется заранее ознакомиться с темой обсуждения, прочитать необходимые материалы и подготовить вопросы. Важно активно слушать и вовлекаться в дискуссию, высказывая свои мнения и аргументируя их. При ответах на вопросы преподавателя стоит быть уверенным, четким и логичным, опираясь на изученный материал. Также полезно поддерживать диалог с однокурсниками, чтобы обогатить обсуждение и расширить свои знания.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модуле) «Основы матричных вычислений»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме ***зачета с оценкой***, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в силлабусе дисциплины:

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
10	Отлично	Зачтено	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
9	Отлично	Зачтено	
8	Отлично	Зачтено	
7	Хорошо	Зачтено	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	Зачтено	
5	Удовлетворительно	Зачтено	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки,
4	Удовлетворительно	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
3	Не сдан	Не зачтено	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	Не зачтено	
1	Не сдан	Не зачтено	

Дисциплина (модуль) «Основы матричных вычислений» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	25%	10	Набор задач по темам недели
Контрольные работы	25%	2	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Аудиторная работа	15%	15	Активная работа студента на семинаре или лекции, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии
Зачет с оценкой	35%	1	Итоговая работа - письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время, возможен дополнительный устный экзамен

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модуле) «Основы матричных вычислений»: «0,2 × среднее за домашние задания + 0,3 × среднее за контрольные работы + 0,15 × за аудиторную работу + 0,35 × зачет с оценкой».

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модуле)

Примерные вопросы для семинаров

1. Объясните идею QR-разложения и свойства получающихся матриц Q и R.
2. Сравните QR- и LU-разложения: в каких ситуациях каждое из них предпочтительнее?
3. Почему у симметричной матрицы все собственные значения вещественны? Как из этого следует ортогональность собственных векторов?
4. Опишите, как из сингулярного разложения (SVD) получаются собственные векторы ковариационной матрицы. Какие свойства данных сохраняются при проекции на первые k главных компонент?
5. В чём различие L_2- (ridge) и L_1- (lasso) регуляризаций с точки зрения геометрии решения? Как регуляризация меняет спектр матрицы системы $Ax = b$?
6. Приведите пример, когда Randomized SVD даёт существенное ускорение по сравнению с классическим SVD. Какие гарантии точности существуют для такого метода?
7. Почему требуемость неотрицательности делает факторизацию неоднозначной? Как мультипликативные обновления обеспечивают сохранение неотрицательности?
8. Какие условия на ранг исходной матрицы гарантируют единственность решения задачи дополнения?
9. Сравните методы CG и GMRES: какие типы систем они решают, какие свойства у их итерационных пространств?

10. Как из матрицы смежности получить спектральную кластеризацию графа? Чем отличается использование лапласиана от матрицы смежности при анализе связности?

Примерные задания по контрольной работе

1. Выполните ручное QR-разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью полученных Q и R найдите решение системы $Ax = b$, где $b = (2, 1, 1)^\top$.

2. Для симметричной матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

а) найдите все собственные значения и нормализованные собственные векторы;

б) проверьте их ортогональность.

3. Дано три двумерных наблюдения $(2, 0),\ (0, 2),\ (3, 3)$.

а) постройте матрицу данных, центрируйте её и найдите ковариационную матрицу;

б) выполните SVD и запишите первые главные компоненты;

в) проецируйте исходные точки на одну главную компоненту и вычислите объяснённую дисперсию.

4. Рассмотрите задачу линейной регрессии $y = Xw$ с

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad y = (2, 0, 3)^\top.$$

а) найдите решение без регуляризации (метод наименьших квадратов);

б) найдите ridge-решение при $\lambda = 1$;

в) сравните нормы решений и объясните влияние λ.

5. Оцените ранговую аппроксимацию матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

при $k = 2$ с помощью Randomized SVD (опишите алгоритм, укажите использованные случайные матрицы и запишите полученные приближённые сингулярные значения).

Примерные домашние задания

1. Напишите функцию **lu_decompose(A)** без поиска по столбцу; проверьте её работу на случайной матрице 5 × 5 и сравните результат с **scipy.linalg.lu**.

2. Сгенерируйте симметричную положительно-определённую матрицу 6 × 6, найдите её спектр (numpy.linalg.eig) и постройте гистограмму распределения собственных значений.

3. Загрузите набор данных **Wine** из scikit-learn, выполните стандартизацию, проведите PCA и постройте двумерный график первых двух главных компонент, раскрасив точки по классам. Оцените долю дисперсии, объясняемую первой компонентой.

4. На наборе **Boston housing** обучите обычную линейную регрессию и ridge-регрессию при разных λ (от 10−4 до 102). С помощью 5-кратной кросс-валидации найдите оптимальное λ и сравните среднеквадратичную ошибку обеих моделей.

5. Реализуйте упрощённый Randomized SVD (двухэтапный: случайное проекционное

сжатие + обычный SVD на небольшой матрице). Протестируйте на разрежённой матрице 1000×1000 (5 % ненулевых элементов) и сравните полученные сингулярные значения с точными, вычисленными через **scipy.sparse.linalg.svds**.

6. Реализуйте алгоритм multiplicative updates для NMF. Примените его к небольшому набору изображений (например, 8×8-пиксельные паттерны), визуализируйте полученные базисные компоненты.

7. Сгенерируйте матрицу ранга 2 размером 30×30, удалите 40 % её элементов (замените на NaN). Восстановите её с помощью Alternating Least Squares (ALS) и вычислите среднеквадратичную ошибку восстановления.

8. Реализуйте простой GMRES с рестартом (размер подпространства $m = 5$). Решите нелинейную систему $Ax=b$ с произвольной нессимметричной матрицей 8×8, постройте график нормы резидуала от числа итераций.

9. Сгенерируйте случайный неориентированный граф (например, **gnp_random_graph(20,0.15)** в networkx). Найдите его матрицу смежности и лапласиана, вычислите несколько наименьших собственных значений лапласиана и визуализируйте их. Описать, как полученные спектры могут использоваться для кластеризации вершин.

10. Соберите все реализованные функции в репозиторий GitHub, подготовьте README с инструкциями, укажите зависимости (**requirements.txt**) и добавьте Jupyter-ноутбуки, демонстрирующие каждый пункт.

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1	Вычислите евклидову норму вектора [1, 2, 3].	3.741657	УК-1
2	Назовите метод разложения матрицы на ортогональные и верхнюю треугольную части.	QR-разложение	УК-1
3	Укажите количество сингулярных значений для матрицы размером 3x2.	2	УК-1
4	Назовите итерационный метод для решения систем линейных уравнений с использованием предыдущих приближений.	Метод Гаусса-Зейделя	УК-2
5	Укажите количество итераций в методе сопряжённых градиентов для симметричной положительно определённой матрицы размером n x n.	n	УК-2
6	Назовите теорему, описывающую малоранговые приближения матриц.	Теорема Эккарта-Янга	ОПК-1
7	Укажите тип структурированных матриц, где все элементы главной диагонали и всех параллельных ей диагоналей одинаковы.	Тёплицевы	ОПК-1
8	Назовите метод для нахождения доминирующего собственного значения матрицы.	Степенной метод	ПК-1
9	Укажите алгоритм, используемый для быстрого умножения циркулянтных матриц.	FFT	ПК-1
10	Вычислите матричную экспоненту для диагональной матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (экспонента от диагонального элемента 1).	e	ПК-2
11	Назовите приложение матричных вычислений в обработке изображений.	Фильтрация	ПК-2
12	Укажите метод предобуславливания для ускорения сходимости итерационных методов.	Диагональный	ПК-2