ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«07» марта 2024 г.
Протокол №1

Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Математические методы в экономике и финансах»

Направление подготовки: *02.03.01 Математика и компьютерные науки*

Направленность (профиль) подготовки: *Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика»*

Квалификация (степень) выпускника: *бакалавр*

Форма обучения: *очная*

Срок освоения программы: *4 года*

Год набора: *2024*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0215B80C000D1B3FEB44A37EE631E0C27D4
Владелец: Ивашкевич Евгений Васильевич
Действителен: с 13.01.2026 до 13.04.2027

Электронный документ

Москва
2024

Содержание

1. **Краткая характеристика дисциплины (модуля)** 3
2. **Перечень планируемых результатов обучения** 5
3. **Тематический план** 6
4. **Содержание дисциплины (модуля)** 6
5. **Учебно-методическое обеспечение** 8
6. **Материально-техническое обеспечение** 8
7. **Методические и оценочные материалы** 10

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Математические методы в экономике и финансах» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины «Математические методы в экономике и финансах» позволяет развить компетенции в области принятия обоснованных управленческих и стратегических решений на основе математического анализа, прогнозирования и оптимизации в условиях неопределённости и динамично меняющейся экономической среды.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Программа двух дипломов НИУ ВШЭ и ЦУ «Прикладная математика и информатика» и входит в вариативную часть Блока 1, формируемую участниками образовательных отношений.

Дисциплина (модуль) является выборной и доступна для изучения на 3 или 4 курсе в 6, 7 или 8 семестрах на выбор.

Цель изучения дисциплины (модуля): формирование у студентов прочной теоретической и практической базы для анализа и моделирования сложных экономических и финансовых процессов с использованием современного математического аппарата.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

— освоить вероятностные, дифференциальные и оптимизационные методы;

— развить навыки построения и анализа количественных моделей, а также применение этих инструментов для решения реальных задач в экономике и финансах.

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

— основные понятия и методы теории вероятностей, включая определения случайных событий, условной вероятности, математического ожидания и дисперсии;

— ключевые вероятностные распределения, используемые при анализе экономических процессов;

— методы решения дифференциальных и разностных уравнений первого и второго порядка, а также их применение в моделировании динамических экономических систем;

— основы математического анализа функций нескольких переменных, включая частные производные, градиент, экстремумы и условия второго порядка;

— принципы построения и анализа многофакторных моделей в финансовом и экономическом планировании;

— современные модели экономического роста и их математическую структуру, включая критические аспекты их применимости и ограничений.

уметь:

— строить и интерпретировать вероятностные модели для оценки рисков, прогнозирования спроса, анализа рынков и принятия решений в условиях неопределённости;

— исследовать функции нескольких переменных, находить их экстремумы и использовать для решения задач оптимизации в микро- и макроэкономике;

— решать линейные дифференциальные и разностные уравнения и применять их для моделирования динамики цен, ВВП, инфляции, популяций и других экономических переменных;

— проводить количественный анализ эффективности экономических решений на основе математических методов;

владеть:

— навыками математического моделирования экономических процессов с использованием аппарата теории вероятностей, анализа функций нескольких переменных и дифференциальных уравнений;

— методами построения и анализа многофакторных эконометрических моделей в контексте финансово-экономического планирования;

— техниками оптимизации экономических показателей на основе количественного анализа данных;

— инструментами применения вероятностных распределений и стохастических моделей для анализа и прогнозирования экономической динамики.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
УК-2.	Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2.1.	Знает действующие правовые нормы, регулирующие деятельность в области решения задач, основные методы и подходы к определению круга задач
		УК-2.2.	Умеет определять круг задач в рамках поставленной цели, выбирать оптимальные способы решения задач, учитывая имеющиеся ресурсы и ограничения
		УК-2.3.	Имеет практический опыт применения знаний о правовых нормах и ресурсах в реальных ситуациях, разработки и реализации решений в соответствии с установленными ограничениями
УК-9.	Способен принимать обоснованные экономические решения в различных областях жизнедеятельности	УК-9.1.	Знает основные экономические теории и принципы; нормативные и правовые акты, регулирующие экономическую деятельность
		УК-9.2.	Умеет анализировать экономическую информацию и данные; разрабатывать и обосновывать экономические стратегии и решения
		УК-9.3.	Имеет практический опыт в применении экономических знаний в реальных ситуациях и проектах
ОПК-7.	Способен использовать основы экономических знаний в различных сферах жизнедеятельности	ОПК-7.1.	Знает базовые экономические понятия, основанные на применении математического анализа
		ОПК-7.2.	Умеет использовать экономические знания для оптимизации и решения задач профессиональной деятельности
		ОПК-7.3.	Имеет практический опыт в применении экономических знаний в профессиональной области
ОПК-8.	Способен использовать основы правовых знаний в различных сферах жизнедеятельности	ОПК-8.1.	Знает основные правовые понятия и области их использования
		ОПК-8.2.	Умеет использовать правовые знания в профессиональной деятельности
		ОПК-8.3.	Имеет практический опыт применения правовых знаний в профессиональной области

3. Тематический план

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы					ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма					
		Аудиторная работа			Контроль	Самостоятельная работа	
		Лекции	Семинарские	Консультации			
1	Функции многих переменных. Методы оптимизации	8	7			32	Домашнее задание Квиз
2	Дифференциальные уравнения	8	7		2	32	Домашнее задание Квиз Контрольная работа
3	Разностные уравнения	8	7			32	Домашнее задание Квиз
4	Портфельный анализ	6	7			30	Домашнее задание Квиз
	Зачет				4		
	Итого:	***30***	***28***		***6***	***126***	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		***190***					
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		***5***					

4. Содержание дисциплины (модуля)

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Функции многих переменных. Методы оптимизации	Функции нескольких переменных. Задача оптимизации. Условия первого порядка. Достаточное условие экстремума. Функция полезности, кривые безразличия. Критерий оптимального набора товаров. Эластичность функции нескольких переменных. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Необходимое условие экстремума. Окаймленный гессиан и достаточное условие экстремума. Экономический смысл множителей Лагранжа. Постановка задачи выпуклого программирования. Функция Лагранжа. Теорема Куна-Таккера. Связь с седловыми точками функции Лагранжа. Задача квадратичного программирования. Задача фирмы с ограничениями на ресурсы. Задача потребителя с бюджетными ограничениями.
2	Дифференциальные уравнения	Дифференциальные уравнения. Основные определения. Примеры уравнений первого порядка и методы их решений. Модели экономической динамики с непрерывным временем Однородные ДУ первого порядка. Уравнения Бернулли и Рикатти. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Модель Самуэльсона-Соллоу. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков. Понижения порядка дифференциальных уравнений. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

		Системы дифференциальных уравнений. Сведение системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка. Приведение матрицы системы к жордановой нормальной форме. Структура пространства решение систем линейных дифференциальных уравнений. Особые точки систем дифференциальных уравнений. Исследование особых точек линейных систем дифференциальных уравнений на устойчивость. Фазовые портреты и их классификация. Нелинейные системы дифференциальный уравнений. Линеаризация систем в окрестности особых точек. Исследование на устойчивость.
3	Разностные уравнения	Элементы теории линейных разностных уравнений. Линейное уравнение первого порядка. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения. ММодели экономической динамики с дискретным временем. Модель Самуэльсона-Хикса. Паутиная модель рынка. Системы разностных уравнений. Линейные системы и методы их решения. Применение систем разностных уравнений в экономике.
4	Портфельный анализ	Совместные распределения случайных величин. Числовые характеристики совместных распределений. Ковариация и коэффициент корреляции. Ковариационная и корреляционная матрицы. Портфель из двух бумаг. Случай полной корреляции. Случай полной антикорреляции. Независимые бумаги. Постановка задачи многокритериальной оптимизации. Множество достижимых критериальных векторов. Доминирование и оптимальность по Парето. Эффективные решения и паретова граница. Основные методы решения многокритериальных задач. Портфели из n бумаг. Портфели Марковица. Портфель минимального риска при заданной его эффективности. Минимальная граница и ее свойства. Оптимальный портфель. Короткие продажи. Задача об оптимальном (неотрицательном) портфеле ценных бумаг. Применение теоремы Куна-Таккера для поиска неотрицательных оптимальных портфелей.

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Теория вероятностей и математическая статистика. Математические модели : учебник для вузов / В. Д. Мятлев, Л. А. Панченко, Г. Ю. Ризниченко, А. Т. Терехин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 321 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01698-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/561493

2. Муратова, Т. В. Дифференциальные уравнения : учебник и практикум для вузов / Т. В. Муратова. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 524 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19174-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/560212

Дополнительная литература*:*

1. Математика для экономистов. Практикум : учебник для вузов / под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 243 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-21744-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/583195

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование»	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое

Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Математические методы в экономике и финансах» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекции, семинары, домашние задания, квизы, контрольная работа, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удается, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Квиз – это интерактивное тестирование, направленное на проверку знаний и понимания изучаемого материала.

Для успешной подготовки к квизу рекомендуется внимательно изучить основные понятия и методы, изучаемые на курсе. Полезно решать практические задачи и примеры, чтобы закрепить теоретические знания. Также стоит ознакомиться с типичными вопросами и форматами заданий, чтобы лучше подготовиться к тестированию.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы – получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины и продемонстрировать навыки их практического применения.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал, использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Математические методы в экономике и финансах»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме ***зачета***, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в силлабусе дисциплины:

Десятибалльная оценка	**Пятибалльная оценка**	**Оценка за зачет**	**Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)**
10	Отлично	Зачтено	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
9	Отлично	Зачтено	
8	Отлично	Зачтено	
7	Хорошо	Зачтено	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей
6	Хорошо	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
5	Удовлетворительно	Зачтено	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине, но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	Зачтено	
3	Не сдан	Не зачтено	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	Не зачтено	
1	Не сдан	Не зачтено	

Дисциплина (модуль) «Математические методы в экономике и финансах» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	20%	14	Набор задач по темам недели
Квизы	20%	10	Интерактивное тестирование, направленное на проверку знаний и понимания изучаемого материала
Контрольная работа	25%	1	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время -- дополнительная часть
Зачет	35%	1	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время/ дополнительная часть

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Введение в экономику»: ««0,2 × среднее за домашние задания + 0,2× среднее за квизы + 0,25× контрольная работа + 0,35 × зачет».

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные домашние задания

1. Исследуйте функцию полезности $U(x,y)=x0.6y0.4$ на экстремум при бюджетном ограничении $2x+3y=120$. Найдите оптимальный набор товаров, используя метод множителей Лагранжа. Проинтерпретируйте экономический смысл множителя Лагранжа.
2. Решите дифференциальное уравнение $y˙(t)+2y(t)=4$. Найдите общее решение и частное решение при начальном условии $y(0)=1$. Постройте график решения и определите, к какому значению стремится $y(t)$ при $t\to\infty$.
3. Рассмотрите модель динамики ВВП, заданную уравнением $Y˙(t)=0.1\cdot(1000-Y(t))$. Найдите равновесное значение ВВП, исследуйте его устойчивость и найдите аналитическое решение при $Y(0)=600$.
4. Решите разностное уравнение $yt+1=0.8yt+50$. Определите стационарное состояние, исследуйте его устойчивость и постройте несколько первых точек траектории при $y0=100$.
5. Портфель состоит из двух активов: первый имеет ожидаемую доходность 8% и риск 10%, второй — 12% и 20%. Коэффициент корреляции между ними равен 0.3. Найдите веса портфеля минимального риска, а также его суммарную доходность и риск.
6. Решите систему разностных уравнений:
   $xt+1=0.5xt+yt$,
   $yt+1=-0.2xt+0.8yt$.
   Найдите особую точку и исследуйте её устойчивость по собственным значениям матрицы перехода.
7. Используя теорему Куна-Таккера, найдите оптимальный портфель из двух активов с доходностями 5% и 10%, рисками 8% и 15%, коэффициентом корреляции 0.4, при условии, что веса неотрицательны, а доходность портфеля не менее 7%.
8. Линеаризуйте систему дифференциальных уравнений в окрестности особой точки:
$x˙=x-xy$,
$y˙=xy-y$.
Найдите якобиан, собственные значения и определите тип особой точки.

Примерные задания для контрольной работы

1. Найдите условный экстремум функции $f(x,y)=x2+y2$ при ограничении $x+y=4$. Проверьте достаточное условие экстремума с помощью окаймлённого гессиана.
2. Решите дифференциальное уравнение Бернулли: $y˙+y=y3$. Укажите тип уравнения, выполните замену переменной и найдите общее решение.
3. Дано линейное разностное уравнение второго порядка: $yt+2-3yt+1+2yt=6$. Найдите общее решение однородного уравнения и частное решение неоднородного. Запишите полное решение.
4. Постройте фазовый портрет для системы:
   $x˙=x+y$,
   $y˙=-2x+y$.
   Найдите особую точку, собственные значения матрицы системы и определите тип точки (узел, фокус, седло и т.д.).
5. Для портфеля из двух активов с ковариационной матрицей
   $\Sigma=(0.040.010.010.09)$
   и вектором ожидаемых доходностей $\mu=(0.06,0.10)$, найдите веса и риск портфеля минимального риска (без дополнительных ограничений на доходность).

6. Проверьте, является ли функция $f(x,y)=4x2+3y2−2xy$ выпуклой. Обоснуйте свой ответ, вычислив матрицу вторых производных и исследовав её на положительную определённость.

7. Решите задачу потребителя: максимизировать функцию полезности $U(x,y)=\ln x+2\ln y$ при бюджетном ограничении $3x+6y=90$. Найдите оптимальные объёмы потребления и значение множителя Лагранжа.

8. Исследуйте устойчивость особой точки системы:

$\dot{x}=-x+2y$,

$\dot{y}=-3x-y$.

Найдите собственные значения и определите тип точки (устойчивый/неустойчивый узел, фокус и т.п.).

Примерные задания для квиза

1. Какое условие является необходимым для существования экстремума функции нескольких переменных?

Ответ: Градиент функции равен нулю.

2. Что означает положительный определитель окаймлённого гессиана второго порядка в задаче на максимум?

Ответ: В данной точке достигается локальный максимум.

3. Какой метод применяется для решения задач оптимизации с ограничениями-неравенствами?

Ответ: Метод Куна-Таккера.

4. Как называется дифференциальное уравнение вида $\dot{y}+p(t)y=q(t)yn$?

Ответ: Уравнение Бернулли.

5. Какой тип модели описывается уравнением $yt+1=ayt+b$?

Ответ: Линейное разностное уравнение первого порядка.

6. Какой тип особой точки системы дифференциальных уравнений соответствует комплексным собственным значениям с отрицательной вещественной частью?

Ответ: Устойчивый фокус.

7. Что показывает коэффициент корреляции между двумя финансовыми активами?

Ответ: Степень линейной зависимости их доходностей.

8. Как называется множество портфелей, которые обеспечивают минимальный риск при заданной доходности?

Ответ: Эффективная граница (граница Марковица).

9. Что означает отрицательная ковариация доходностей двух активов?

Ответ: Их доходности, как правило, изменяются в противоположных направлениях.

10. Какой принцип лежит в основе выбора оптимального портфеля по Марковицу?

Ответ: Минимизация риска при заданной ожидаемой доходности или максимизация доходности при заданном уровне риска.

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1	Какой критерий позволяет определить точку потенциального экстремума функции в экономической модели?	Условие первого порядка: градиент равен нулю	ОПК-7
2	Почему важно проверять достаточные условия при поиске экстремума в задаче	Чтобы отличить максимум прибыли от минимума или	УК-9

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
	оптимизации прибыли фирмы?	седловой точки	
3	Какой метод используется для поиска оптимального решения при бюджетных ограничениях потребителя?	Метод множителей Лагранжа	УК-2
4	Какой экономический смысл имеет множитель Лагранжа в задаче оптимизации потребительского выбора?	Предельная полезность денежной единицы (теневая цена бюджета)	УК-9
5	При каком свойстве функции локальный экстремум автоматически является глобальным в экономической задаче?	Вогнутость (для максимума) или выпуклость (для минимума)	ОПК-7
6	Что отражает кривая безразличия в модели поведения потребителя?	Наборы товаров с одинаковой полезностью	ОПК-7
7	Какое условие определяет оптимальный выбор потребителя при заданных ценах и бюджете?	Равенство предельной нормы замещения и отношения цен	УК-2
8	Как вычисляется эластичность функции спроса по цене для анализа рыночной чувствительности?	Производная логарифма функции по логарифму аргумента	ОПК-7
9	Что представляет собой окаймлённый гессиан в задаче условной оптимизации с бюджетным ограничением?	Матрица вторых производных функции Лагранжа с учётом ограничений	ОПК-7
10	При каком условии решение задачи оптимизации производства является устойчивым и глобальным?	Выпуклость целевой функции и множества допустимых решений	УК-9
11	Какие условия лежат в основе анализа оптимальности портфеля ценных бумаг с ограничениями-неравенствами?	Теорема Куна-Таккера	УК-2
12	Что означает седловая точка функции Лагранжа в задаче распределения ресурсов?	Минимизация по переменным и максимизация по множителям	УК-9
13	К какому типу задач математического программирования сводится оптимизация инвестиционного портфеля?	Задача квадратичного программирования	ОПК-7
14	Какое уравнение описывает динамику накопления капитала в модели экономического роста Солоу?	Дифференциальное уравнение: $\dot{k} = sf(k) - \delta k$	УК-9
15	Какой общий вид имеет линейное дифференциальное уравнение первого порядка в моделях экономической	$\dot{x}(t) + a(t)x(t) = b(t)$	ОПК-7

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
	динамики?		
16	Какой приём используется для решения нелинейного дифференциального уравнения Бернулли в экономической модели?	Замена переменной $z = x^{1-n}$	УК-2
17	При каком условии дифференциальная форма Mdx + Ndy является полным дифференциалом в модели рынка?	$\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$	ОПК-7
18	Для чего применяется интегрирующий множитель в решении дифференциальных уравнений экономической динамики?	Превращение неэкзактного уравнения в уравнение в полных дифференциалах	УК-2
19	Какая модель экономического роста основана на дифференциальных уравнениях и производственной функции?	Модель Солоу (Самуэльсона-Солоу)	УК-9
20	Каким способом можно понизить порядок системы дифференциальных уравнений в модели межотраслевого баланса?	Дифференцирование одного уравнения и подстановка из другого	УК-2