ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«24» июня 2025 г.
Протокол №2

Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Стохастический анализ»

Направление подготовки: *02.03.01 Математика и компьютерные науки*

Направленность (профиль) подготовки: *Математика и искусственный интеллект*

Квалификация (степень) выпускника: *бакалавр*

Форма обучения: *очная*

Срок освоения программы: *4 года*

Год набора: *2025*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0215B0C000D1B3FEB44A37EE631E0C27D4
Владелец: Ивашкевич Евгений Васильевич
Действителен: с 13.01.2026 до 13.04.2027

Электронный документ

Москва
2025

Содержание

1. **Краткая характеристика дисциплины (модуля)** 3
2. **Перечень планируемых результатов обучения** 5
3. **Тематический план** 6
4. **Содержание дисциплины (модуля)** 7
5. **Учебно-методическое обеспечение** 8
6. **Материально-техническое обеспечение** 8
7. **Методические и оценочные материалы** 10

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Стохастический анализ» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Математика и искусственный интеллект», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Дисциплина (модуль) «Стохастический анализ» является ключевым инструментом для описания и предсказания поведения систем, подверженных случайным возмущениям; он обеспечивает теоретическую основу финансовой математики (моделирование цен, оценка риска), физики (квантовая и статистическая механика), биологии (моделирование популяций, генетических процессов) и инженерных приложений (управление в условиях неопределённости, фильтрация сигналов); владение этими методами расширяет аналитический арсенал специалиста, повышает точность моделей и делает возможным разработку надёжных решений в условиях неопределённости.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Математика и искусственный интеллект» и входит обязательную часть Блока 1.

Дисциплина (модуль) доступна для изучения на 3 или 4 курсе в 6, 7, 8 семестрах на выбор.

Цель изучения дисциплины (модуля): получить представление о стохастических процессах, научить формулировать модели случайных явлений и применять вероятностные инструменты для анализа и прогнозирования реальных систем.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

— изучить основные понятия теории вероятностей (вероятностные пространства, случайные величины, распределения);

— освоить методы построения и исследования марковских цепей, процессов с независимыми приращениями (в частности, процесс Винера/брауновское движение);

— понять принципы и техники стохастической интеграции (интеграл Ито, формула Ито) и их применение к стохастическим дифференциальным уравнениям;

— научиться оценивать сходимость численных схем для СДУ и реализовывать их на компьютере;

— рассмотреть прикладные задачи в финансах, физике, биологии и инженерии, где используются стохастические модели.

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

— основные понятия случайных процессов: определение случайного блуждания, вероятность выхода на границу, среднее время выхода, критерий возвратности;

— винеровский процесс как предельный случай случайного блуждания, его свойства (непрерывные траектории, гауссовость приращений, масштабирование) и связь с уравнением теплопроводности;

— гауссовские и стационарные процессы, определение гауссовского процесса, гауссовская регрессия (априорные и апостериорные распределения);

— теория марковских моделей: классификация состояний цепи Маркова (возвратность, сообщающиеся классы, периодичность), спектральные свойства матрицы переходных вероятностей, эргодическая теорема, понятие стационарного распределения,

марковский процесс непрерывного времени, инфинитезимальный генератор, прямые и обратные уравнения Колмогорова;

— пуассоновский процесс: определение через приращения и через времена ожидания, его свойства;

— стохастические дифференциальные уравнения: определение диффузионного процесса, стохастический интеграл Ито и его свойства, формула Ито и её применение, формула Каца-Фейнмана (связь СДУ и уравнений в частных производных), уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка для плотности переходной вероятности;

уметь:

— анализировать случайные блуждания: вычислять вероятность выхода на границу и среднее время выхода для простых блужданий, исследовать возвратность/транзиентность на решётке;

— работать с гауссовскими процессами и временными рядами: строить гауссовскую регрессию (выбор ядра, предсказание с доверительными интервалами), вычислять спектральную плотность стационарного процесса по корреляционной функции и наоборот, решать простые задачи прогнозирования;

— применять цепи Маркова к прикладным задачам: реализовывать алгоритм PageRank, строить скрытую марковскую модель (HMM), решать прямую и обратную задачи (алгоритмы forward-backward, Витерби), оценивать параметры HMM методом EM (алгоритм Баум-Велша);

— решать прямые и обратные уравнения Колмогорова для марковских процессов конечного числа состояний, находить стационарное распределение для процессов рождения и гибели;

— работать со стохастическими дифференциальными уравнениями: вычислять простые стохастические интегралы Ито, применять формулу Ито для решения линейных СДУ (геометрическое броуновское движение, процесс Орнштейна-Уленбека), выводить уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка для заданного СДУ;

владеть:

— навыком строгого вероятностного рассуждения о случайных процессах: обосновать предельный переход от случайного блуждания к винеровскому процессу (принцип инвариантности Донс-Керра), доказать возвратность/транзиентность блужданий разных размерностей, понимать роль закона больших чисел и центральной предельной теоремы в построении винеровского процесса;

— методами качественного анализа марковских процессов: определять эргодичность по спектральному радиусу матрицы переходных вероятностей, оценивать скорость сходимости к стационарному распределению через второе собственное значение (спектральная щель), конструировать инфинитезимальный генератор для процессов непрерывного времени;

— техникой решения стохастических дифференциальных уравнений: выбирать подходящий метод (формула Ито, метод неопределённых коэффициентов, сведение к детерминированному уравнению) в зависимости от структуры СДУ, реализовывать численное моделирование траекторий (метод Эйлера-Маруяма, схемы более высокого порядка);

— пониманием связи между СДУ и уравнениями в частных производных: использовать формулу Каца-Фейнмана для представления решения краевых задач теплопроводности/уравнения Пуассона в виде математического ожидания функционала от диффузионного процесса, применять уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка для анализа переходных плотностей диффузий.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
ОПК-1.	Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики	ОПК-1.1.	Знает основные методы и подходы к решению задач прикладной и компьютерной математики, включая алгоритмы, математическое моделирование и теорию оптимизации, а также современные инструменты и технологии, используемые в этой области
		ОПК-1.2.	Умеет анализировать и формулировать математические задачи, применять соответствующие методы и алгоритмы для их решения, а также интерпретировать и представлять результаты в понятной и доступной форме
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт работы над проектами или исследованиями в области прикладной и компьютерной математики, включая участие в конкурсах, олимпиадах или научных публикациях, где были решены актуальные и значимые задачи
ПК-1.	Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области математики и компьютерных наук	ПК-1.1.	Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов.
		ПК-1.2.	Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты.
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач

3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Аудиторная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
		Лекции	Семинары			
1	Основные понятия теории случайных процессов	10	10		40	Домашнее задание
2	Марковские модели	10	10	2	40	Домашнее задание Контрольная работа Лабораторная работа
3	Стохастические дифференциальные уравнения	10	10	2	42	Домашнее задание Контрольная работа Лабораторная работа
	Зачет с оценкой			4		Контроль теоретических знаний
	Итого:	***30***	***30***	***8***	***122***	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		***190***				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		***5***				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Основные понятия теории случайных процессов	Случайные блуждания, свойства траекторий Винеровский процесс, свойства винеровского процесса Гауссовские процессы. Гауссовская регрессия
2	Марковские модели	Цепь Маркова, классификация состояний, свойства матрицы переходных вероятностей Эргодическая теорема, стационарное распределение. Прикладные модели на основе цепей Маркова: PageRank, Hidden Markov Models (HMM). Прикладные модели на основе цепей Маркова: Марковская цепь Монте-Карло Пуассовновский процесс, распределение времени ожидания между скачками
3	Стохастические дифференциальные уравнения	Диффузионные процессы, прямое и обратное уравнение Колмогорова Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ), интеграл Ито Формула Ито, методы решения СДУ Формула Каца-Фейнмана, уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка Примеры СДУ: процесс Орштейна-Уленбека, геометрическое броуновское движение Обратимость в СДУ, теорема Андерсона Приложения СДУ: диффузионные модели

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Круглов, В. М. Случайные процессы в 2 ч. Часть 1. Основы общей теории : учебник для вузов / В. М. Круглов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 276 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01748-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/536889

2. Круглов, В. М. Случайные процессы в 2 ч. Часть 2. Основы стохастического анализа : учебник для вузов / В. М. Круглов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 280 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02086-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/537767

3. Каштанов, В. А. Случайные процессы : учебник и практикум для вузов / В. А. Каштанов, Н. Ю. Энатская. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 99 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04482-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/584979

Дополнительная литература:

1. Энатская, Н. Ю. Математическая статистика и случайные процессы : учебник для вузов / Н. Ю. Энатская. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 191 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-9808-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/583925

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование"	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модуле), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		

Электронный документ

КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Стохастический анализ» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, лабораторные работы, контрольные работы, домашние задания, контроль теоретических знаний, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удается, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы

избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Лабораторная работа – учебное занятие, направленное на практическое закрепление теоретических знаний через выполнение экспериментальных или проектных заданий. В ходе лабораторной работы студенты проводят анализ, разработку или тестирование программного кода, изученного в рамках курса.

Перед выполнением лабораторной работы необходимо внимательно ознакомиться с теоретическим материалом и методическими указаниями. Рекомендуется изучить используемые инструменты и технологии для уверенного их применения на практике. При возникновении вопросов следует обращаться к преподавателю для получения разъяснений.

Контроль теоретических знаний – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее.

В процессе подготовки студенту необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модуле) «Стохастический анализ»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме ***зачета с оценкой***, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в силлабусе дисциплины:

Десятибалльная оценка	**Пятибалльная оценка**	**Оценка за зачет**	**Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)**
10	Отлично	Зачтено	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает
9	Отлично	Зачтено	
8	Отлично	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Зачтено	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические
6	Хорошо	Зачтено	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
			аспекты предмета с практическими задачами.
5	Удовлетворительно	Зачтено	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	Зачтено	
3	Не сдан	Не зачтено	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	Не зачтено	
1	Не сдан	Не зачтено	

Дисциплина (модуль) «Стохастический анализ» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	40%	14	Набор задач по темам недели
Контрольные работы	20%	2	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Лабораторная работа	20%	2	Практическое задание, направленное на применение теоретических знаний при решении конкретных задач, выполняемое под руководством преподавателя
Зачет с оценкой	20%	1	Контроль теоретических знаний

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модуле) «Стохастический анализ»: «0,4× среднее за домашние задания + 0,2× среднее за контрольные работы + 0,2 ×среднее за лабораторные работы + 0,2 × зачет с оценкой».

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модуле)

Примерные задания для лабораторной работы

1.1 Броуновское (Винеровское) движение

— **Содержание:** сгенерировать траектории одномерного и двумерного Винеровского процесса, построить гистограммы конечных состояний и оценить их дисперсию.

— **Ожидаемые результаты:** показать линейный рост дисперсии с временем, подтвердить нормальность распределения позиций при помощи Q-Q-графиков и тестов (Шапиро-Уилк).

1.2 Процесс Пуассона

— **Содержание:** смоделировать событийный процесс с постоянной интенсивностью λ, построить график количества событий в зависимости от времени, оценить λ методом максимального правдоподобия.

— **Ожидаемые результаты:** сравнение эмпирического распределения интервалов между событиями с экспоненциальным, оценка среднеквадратичной ошибки оценки λ.

1.3 AR(1) и MA(1) модели

— **Содержание:** сгенерировать автокоррелированные (AR) и скользящие средние (MA) процессы, построить коррелограммы, оценить параметры ρ и θ через МНК.

— **Ожидаемые результаты:** визуализировать характерную структуру автокорреляции: убывание в AR(1) и «прыжок» в MA(1).

Примерные задания по контрольной работе

1. *случайное блуждание* : для простого симметричного блуждания на отрезке [0, a] найдите (a) вероятность выхода в точку a, (b) среднее время выхода, начиная из состояния i; сравните полученные формулы с результатами из теории.
2. *винеровский процесс* : покажите, что процесс $W(t)$ имеет независимые приращения и масштабирование $\sqrt{c}\,W(t)=W(ct)$; используя эти свойства, выведите связь с решением уравнения теплопроводности.
3. *марковская цепь* : дано матричное представление переходов P для цепи из 4 состояний; найдите стационарное распределение, определите периодичность и вычислите скорость сходимости к стационарному вектору (оценка через второй по модулю собственный спектр).
4. *пуассоновский процесс* : используя интенсивность $\lambda=3$, найдите (a) распределение числа событий за интервал $t=2$, (b) распределение времени до первого прибытия, (c) среднее расстояние между соседними событиями.
5. *сд·у* : решите линейное стохастическое дифференциальное уравнение $dX_t=\mu X_t\,dt+\sigma X_t\,dW_t$ с $X_0=1$; запишите решение в виде $X_t=\dots$ и вычислите математическое ожидание $E[X_t]$ и дисперсию $Var[X_t]$.
6. *формула Ито* : примените формулу Ито к функции $g(t,X_t)=X_t^2$; найдите дифференциальную форму $dg(t,X_t)$ и интегрируйте её, получив выражение для X_t^2 в терминах $\int X\,dW$.
7. *численное моделирование* : реализуйте метод Эйлера-Ито для уравнения $dX_t=0.5\,dt+X_t\,dW_t$ на $[0][1]$ с $\Delta t=0.01$; постройте 5 независимых траекторий и оцените среднеквадратичную ошибку по сравнению с аналитическим решением.

Примерные домашние задания

1. напишите функцию **random_walk(p, n)** – симуляцию простого блуждания с вероятностью шага вправо p на n шагов; визуализируйте одну траекторию и постройте гистограмму конечных позиций.
2. реализуйте генерацию винеровского процесса с помощью метода броуновского движения (нормальные приращения) и сравните полученные дискретные траектории с теоретическим распределением $N(0,t)$.
3. постройте матрицу переходов для марковской цепи из 5 состояний, задав произвольные вероятности, убедитесь, что каждая строка суммируется до 1; найдите спектр матрицы и определите, является ли цепь эргодичной.

4. смоделируйте пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda=2$ на интервале [0][5] с помощью функции **np.random.exponential**; постройте график числа событий во времени и сравните эмпирическую интенсивность с заданной.

5. реализуйте стохастический интеграл Ито $\int_0^T W_s\, dW_s$ для заданного пути W_s (используйте левый Риманский сумм); сравните результат с аналитическим ½ (W_T²-T).

6. решите задачу выхода из отрезка [0][10] для симметричного блуждания, начального состояния i=3, используя метод отражения; проверьте полученную вероятность выхода в 10 через симуляцию 10 000 траекторий.

7. проведите эксперимент с методом Эйлера-Ито для нелинейного СДУ $dX_t=-X_t^3\, dt+0.5\, dW_t$; исследуйте зависимость среднего квадратичного отклонения от шага Δt (0.1, 0.05, 0.01) и постройте график сходимости.

8. выполните гауссовскую регрессию (RBF-ядро) для синтетических данных $y=\sin(2\pi x)+\varepsilon$, $\varepsilon\sim N(0,0.1^2)$; предскажите значение в x=0.75, постройте доверительный интервал 95 % и сравните с истинным значением.

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1.	Чем характеризуется распределение шага в простом симметричном случайном блуждании?	Равновероятные перемещения влево/вправо	ОПК-1
2.	Какой непрерывный процесс возникает как предел нормированного случайного блуждания?	Винеровский процесс / Броуновское движение	ПК-1
3.	Чему равна дисперсия винеровского процесса в фиксированный момент времени t?	t (время)	ОПК-1
4.	Какие две функции полностью определяют гауссовский процесс?	Математическое ожидание и ковариационная функция	ПК-1
5.	Каким образом гауссовская регрессия применяется в задачах машинного обучения?	Для байесовской оптимизации и регрессионного анализа	ОПК-1
6.	В чем заключается основное свойство марковости случайного процесса?	Будущее зависит только от настоящего, а не от прошлого	ПК-1
7.	При каком условии цепь Маркова обладает единственным стационарным распределением?	Эргодичность / Неприводимость и апериодичность	ОПК-1
8.	Какой известный алгоритм использует стационарное распределение цепи Маркова для ранжирования?	PageRank	ПК-1
9.	Какая модель подходит для описания системы с ненаблюдаемыми внутренними состояниями?	Скрытая маркавская модель (HMM)	ОПК-1
10.	Какой метод использует цепи Маркова для выборки из сложных вероятностных распределений?	Монте-Карло на цепях Маркова (MCMC)	ПК-1

11.	Как распределены временные интервалы между событиями в процессе Пуассона?	Экспоненциальное распределение	ОПК-1
12.	Какое слагаемое отличает формулу Ито от классического правила дифференцирования функций?	Второе порядка слагаемое ($\frac{1}{2}\sigma^2 g_{xx} dt$)	ПК-1
13.	Почему при построении интеграла Ито выбирается левая граница интервала разбиения?	Для сохранения свойства мартингала / независимости приращений	ОПК-1
14.	Какое уравнение описывает эволюцию плотности вероятности во времени для диффузионного процесса?	Уравнение Фоккера-Планка / Прямое уравнение Колмогорова	ПК-1
15.	Какой стохастический процесс моделирует возвращение к среднему значению?	Процесс Орнштейна-Уленбека	ОПК-1
16.	Какая модель чаще всего применяется для описания динамики цен акций?	Геометрическое броуновское движение	ПК-1
17.	Какой класс генеративных нейросетей основан на обращении стохастического диффузионного процесса?	Diffusion Models / Диффузионные модели	ОПК-1
18.	Какая численная схема обеспечивает сильную сходимость при решении СДУ?	Схема Эйлера-Маруямы	ПК-1
19.	Назовите программную библиотеку Python для вероятностного программирования и стохастического моделирования.	PyMC / TensorFlow Probability / NumPyro	ОПК-1
20.	Как методы стохастического анализа помогают в оценке рисков технической системы?	Моделирование вероятностей отказов и непредсказуемых нагрузок	ПК-1