ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«24» июня 2025 г.
Протокол №2

Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Линейная алгебра и геометрия. Часть 2»

Направление подготовки: *02.03.01 Математика и компьютерные науки*

Направленность (профиль) подготовки: *Математика и искусственный интеллект*

Квалификация (степень) выпускника: *бакалавр*

Форма обучения: *очная*

Срок освоения программы: *4 года*

Год набора: *2025*

Москва
2025

Электронный документ

Содержание

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Линейная алгебра и геометрия. Часть 2» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по специальности 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Математика и искусственный интеллект, утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) дает развитие аналитического мышления, навыков работы с математическими моделями и понимания пространственных структур, что является основой для дальнейшего изучения более сложных математических и компьютерных дисциплин.

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Математика и искусственный интеллект и входит в обязательную часть Блока 1, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) изучается на 1 курсе во 2 семестре. Доступна для изучения после успешного освоения дисциплины (модуля) «Линейная алгебра и геометрия. Часть 1».

Дисциплина (модуль) «Линейная алгебра и геометрия» имеет два уровня подготовки: основной и пилотный поток. Обучающиеся распределяются на соответствующие уровни по итогам входного тестирования по дисциплине (модулю).

Цель изучения дисциплины (модуля): в формировании глубокого понимания пределов, непрерывности, производных и интегралов, а также их применения в различных областях науки и техники.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

— освоение фундаментальных понятий и геометрических интерпретаций линейной алгебры**;**

— применение алгоритмов и методов для решения вычислительных задач**;**

— интеграция теории с доказательствами и прикладными моделями**.**

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

— основные алгебраические структуры линейной алгебры: векторные пространства, билинейные и квадратичные формы, линейные операторы и их инварианты.

— ключевые теоремы и классификационные результаты: о диагонализации, спектральном разложении, жордановой и сингулярной формах, ортогональных и самосопряжённых операторах.

— взаимосвязь геометрических и алгебраических понятий: длина, угол, проекция, объём, ориентация — и их выражение через скалярное произведение, матрицу Грама, определитель.

— принципы инвариантности: какие характеристики сохраняются при замене базиса, и как они используются для классификации объектов.

— иерархию линейных моделей: от общих (произвольные операторы) к структурированным (диагонализируемые, нормальные, ортогональные, симметричные);

уметь:

— приводить билинейные и квадратичные формы к каноническому (диагональному) виду и определять их тип по сигнатуре или рангу.

— находить собственные значения и векторы, строить жордановы и спектральные разложения линейных операторов.

— выполнять ортогонализацию, строить ортопроекторы и решать задачи наилучшего приближения (в т.ч. методом наименьших квадратов).

— вычислять и интерпретировать геометрические величины (объёмы, расстояния, углы) с помощью алгебраических инструментов (матрица Грама, определитель, SVD).

— применять сингулярное разложение для анализа и приближения матриц, включая задачи понижения размерности и устойчивого обращения;

владеть:

— языком инвариантного описания: умением отделять сущность объекта от его координатного представления.

— алгоритмической культурой линейной алгебры: чётким следованием процедурам диагонализации, ЖНФ, QR/SVD-разложений с пониманием их условий применимости.

— геометрической интуицией в многомерных пространствах: способностью интерпретировать алгебраические конструкции (ядро, образ, инвариантное подпространство) как геометрические объекты.

— навыками строгого доказательства: построения логических цепочек, использующих двойственность, ортогональные дополнения, индукцию по размерности, разложение пространства.

— подходом к моделированию линейных систем: умением выбирать адекватную алгебраическую модель (оператор, форма, разложение) под задачу — от классификации до оптимизации и аппроксимации.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
ОПК-1.	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1.	Знает основные концепции и теории в области математического анализа и смежных дисциплин; методы и подходы, используемые в различных областях математики
		ОПК-1.2.	Умеет применять математические методы для решения профессиональных задач
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт разработки и реализация математических моделей в профессиональной деятельности
ОПК-4.	Способен находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем	ОПК-4.1.	Знает базовые основы современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности.
		ОПК-4.2.	Умеет использовать этот математический аппарат в профессиональной деятельности.
		ОПК-4.3.	Имеет практический опыт применения современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности.
ПК-1.	Способен формулировать задачи с математической точностью, обосновывать утверждения строго и анализировать полученные результаты в области	ПК-1.1.	Знает методы и подходы к формулированию задач, а также основные принципы математического доказательства и анализа результатов.

	математики и компьютерных наук	ПК-1.2.	Умеет корректно ставить и формулировать математические задачи, применять строгие методы доказательства и анализировать полученные результаты.
		ПК-1.3.	Имеет опыт работы с задачами в области математики и компьютерных наук, включая применение математических методов для решения практических задач

3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Контактная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
		Лекции	Семинары (практические занятия)			
Основной уровень 2 семестр						
1	Билинейные и квадратичные формы	6	6		24	Домашнее задание Контрольная работа
2	Евклидовы пространства	6	6		25	Домашнее задание Контрольная работа
3	Геометрия малых размерностей	6	6		25	Домашнее задание Коллоквиум
4	Линейные операторы	6	6		25	Домашнее задание Контрольная работа
5	ЖНФ (жорданова нормальная форма)	6	6		25	Домашнее задание Коллоквиум
	Экзамен			6		
Итого за 2 семестр:		***30***	***30***	***6***	***124***	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		***190***				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		***5***				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
Основной уровень 2 семестр		
1	Билинейные и квадратичные формы	Напоминание: Билинейные формы, ортогональные дополнения и невырожденность. Теорема о двойственности на подпространствах. Билинейные формы на одном пространстве. Обсуждение того, какие матричные характеристики являются инвариантами формы: (1) ранг, (2) след не является, (3) определитель по модулю квадратов ненулевых чисел, (4) невырожденность матрицы. Симметричность и кососимметричность формы. Разложение любой билинейной формы в сумму симметрической и кососимметрической. Ограничение билинейной формы на подпространство. Невырожденность ограничения. Диагонализуемость симметрических форм (замечание про характеристику 2). Симметричный Гаусс. Метод Якоби. Алгоритм диагонализации на основе метода Якоби. Классификация симметрических билинейных форм над алгебраически замкнутым полем. Классификация симметричных билинейных форм над полем вещественных чисел и сигнатура Квадратичные формы. Связь квадратичных и билинейных форм. Геометрический смысл сигнатуры. Графики квадратичных форм. Анализ поверхности. Положительная и отрицательная определенность формы над полем вещественных чисел. Критерий Сильвестра. Скалярные произведения. Ортогональные и ортонормированные базисы. Задание скалярных произведений в базисах. Ортогональные матрицы.

		Классификация ортонормированных базисов в терминах одного ортонормированного базиса.
2	Евклидовы пространства	Евклидовы пространства. Понятие длины вектора. Неравенство Коши-Буняковского. Понятие угла в евклидовом пространстве. Теорема Пифагора. Классификация евклидовых пространств. Замечание о сведении к школьной геометрии. Ортогонализация Грама-Шмидта. QR разложение. Проекции и ортопроекции. Формула БАБА для проектора. Формула Атата для ортопроектора. Расстояние между двумя векторами, между вектором и подпространством, угол между вектором и подпространством. Метод наименьших квадратов. Матрица Грама и ее свойства. k-мерные объемы через матрицу Грама и рекурентная формула. Расстояние от вектора до подпространства через объемы. Изменение объема под действием линейного отображения и при смене образующих параллелепипеда. Понятие ориентированного n-мерного объема. Изменение ориентированного объема при смене образующих параллелепипеда. Связь ориентированного объема с определителем. Смена ориентированного объема под действием оператора
3	Геометрия малых размерностей	Геометрические задачи в пространствах R^2 и R^3
4	Линейные операторы	Линейные операторы. Матрица линейного оператора, смена матрицы при замене базиса. Характеристики линейного оператора: след, определитель, характеристический многочлен, минимальный многочлен, спектр, ранг. Критерии обратимости линейного оператора. Инвариантные подпространства и связь с углом нулей. Ограничение линейного оператора на подпространство. Инвариантность ядра и образа относительно коммутирующего оператора. Собственные значения и векторы. Диагонализуемость оператора. Собственные подпространства и их линейная независимость. Существование ненулевого собственного вектора над C. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения. Связь между алгебраической и геометрической кратностями. Признак диагонализуемости через хар многочлен (через зануляющий многочлен (БД)). Критерий диагонализуемости линейного оператора. Существование одномерного или двумерного инвариантного подпространства у линейного оператора над R. Сопряженное линейное отображение.: определение, существование и единственность. Матрица сопряжённого отображения. Сопряжённый оператор в евклидовом пространстве. Самосопряжённые (симметрические) операторы. Существование собственного вектора у самосопряжённого оператора. Инвариантность ортогонального дополнения к инвариантному подпространству для самосопряжённого оператора. Теорема о существовании у самосопряжённого оператора ортонормированного базиса из собственных векторов. Попарная ортогональность собственных подпространств самосопряжённого оператора. Приведение квадратичной формы в евклидовом пространстве к главным осям. Ортогональные линейные операторы, семь эквивалентных условий. Описание ортогональных операторов в одномерном и двумерном евклидовых пространствах. Инвариантность ортогонального дополнения к подпространству, инвариантному относительно ортогонального оператора. Теорема о каноническом виде ортогонального оператора. Классификация ортогональных операторов в трёхмерном евклидовом пространстве. Спектральное разложение. Случаи R^2 и R^3. Теорема о сингулярных базисах для линейного отображения евклидовых пространств. SVD для матрицы. Усечённое и компактное SVD. Фробениусова норма матрицы, её инвариантность относительно умножения на ортогональную матрицу слева или справа. Теорема Эккарта-Янга о низкоранговом приближении.

5	ЖНФ (жорданова нормальная форма)	Утверждение о подстановке оператора во взаимно простые многочлены. Теорема о разложении через зануляющий многочлен. Разложение пространства в прямую сумму корневых. Описание инвариантных подпространств. Геометрический смысл кратности корня характеристического и минимального многочленов. Отношение равенства по модулю подпространства. Линейная независимость, порождающие и базис по модулю подпространства (определения и критерии). Определение жорданова базиса и жордановой нормальной формы (ЖНФ). Теорема о ЖНФ для нильпотентных операторов: единственность и формула для количества клеток. Теорема о ЖНФ для произвольного оператора: существование и едниственность. Классификация линейных операторов. Разложение Шура. Алгоритмы поиска жодрданова базиса: 1) сверху вниз, 2) элементарные преобразования цепочек.

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Татарников, О. В. Линейная алгебра : учебник для вузов / О. В. Татарников, А. С. Чуйко, В. Г. Шершнев ; под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 273 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19275-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/556226.

2. Шилин, И. А. Линейная алгебра. Задачник : учебное пособие для вузов / И. А. Шилин. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 118 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-14382-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/567570.

3. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник и практикум для вузов / Е. Г. Плотникова, А. П. Иванов, В. В. Логинова, А. В. Морозова ; под редакцией Е. Г. Плотниковой. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 416 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-18887-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/560611.

4. Лубягина, Е. Н. Линейная алгебра : учебник для вузов / Е. Н. Лубягина, Е. М. Вечтомов. — 2-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 150 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10594-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/565745.

Дополнительная литература:

1. Бурмистрова, Е. Б. Линейная алгебра : учебник и практикум для вузов / Е. Б. Бурмистрова, С. Г. Лобанов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 421 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-15839-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/560017.

2. Сабитов, И. Х. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие для вузов / И. Х. Сабитов, А. А. Михалев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 258 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08941-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/539950.

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

- столами и стульями;
- компьютерной техникой;
- механическими калькуляторами;
- специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование"	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное
Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		

Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Линейная алгебра и геометрия. Часть 2» в рамках текущего контроля успеваемости в каждом семестре используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, коллоквиумы, контрольные работы и домашние задания, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удается, следует сформулировать вопрос и задать его преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Коллоквиум – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее,

В процессе подготовки к коллоквиуму необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модулю) «Линейная алгебра и геометрия. Часть 2»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации в каждом семестре.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) в каждом семестре осуществляется в форме ***экзамена***, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом:

Десятибалльная оценка	**Пятибалльная оценка**	**Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)**
10	Отлично	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать
9	Отлично	
8	Отлично	

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
		изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
7	Хорошо	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	
5	Удовлетворительно	Студент обладает базовыми знаниями по дисциплине, но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
4	Удовлетворительно	
3	Не сдан	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	
1	Не сдан	

Дисциплина (модуль) «Линейная алгебра и геометрия. Часть 2» в каждом семестре оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Описание
		Основой уровень
Домашние задания	15%	Набор задач по темам недели
Аудиторная работа	10%	Активная работа на семинарах, ответы на вопросы
Контрольные работы	20%	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Коллоквиум	25%	Устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее
Экзамен	30%	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модулю) «Линейная алгебра и геометрия. Часть 2»:

Основной уровень: «0,15× среднее за домашние задания + 0,1 × среднее за аудиторную работу + 0,2 × среднее за контрольные работы + 0,25 × коллоквиум + 0,3 × экзамен».

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Примерные темы к коллоквиуму

Тема «Системы линейных уравнений»

- Совместная и несовместная система
- Определённая и неопределённая система
- Однородная и неоднородная система
- Матрица
- Главная и побочная диагонали
- Элементарные преобразования строк
- Ступенчатый вид матрицы
- Главные и свободные переменные
- Как по ступенчатому виду понять, что система определена?
- Сколько может быть решений у системы линейных уравнений?
- Прямой ход алгоритма Гаусса
- Обратный ход алгоритма Гаусса

Тема «Операции над матрицами»

- Сумма матриц
- Нулевая матрица
- Произведение матрицы на число
- Произведение матриц
- Пример некоммутативности матричного умножения
- Коммутирующие матрицы
- Делители нуля
- Нильпотентные матрицы
- Транспонирование матриц
- Симметричная матрица
- След матрицы
- Блочное умножение матриц
- Умножение на диагональную матрицу
- Транспонирование от произведения матриц
- След от произведения матриц

Тема «Обратные матрицы. Матричные уравнения»

- Единичная матрица
- Обратная матрица
- Матрицы элементарных преобразований I, II, III типов и их обратные
- Подстановка матрицы в многочлен
- Матрицы, коммутирующие с диагональной матрицей с разными числами на диагонали
- Классификация систем линейных уравнений
- Связь обращения матриц с умножением и транспонированием
- Эквивалентные условия обратимости матрицы
- Подстановка в многочлен матрицы $C^{-1}AC$
- Алгоритм поиска обратной и проверки обратимости
- Алгоритм решения уравнений $AX = B$

- Связь обращения матриц с умножением и транспонированием
- Только квадратные матрицы обратимы

Тема «LU-разложение»

- LU-разложение

Тема «Векторные пространства»

- Векторное пространство
- Пример векторного пространства отличный от R^n или матриц
- Подпространство векторного пространства
- Линейная комбинация векторов
- Линейно независимый набор векторов
- Коллинеарные векторы
- Компланарные векторы
- Линейная оболочка системы векторов
- Порождающая система векторов
- Базис
- Размерность векторного пространства
- Координаты вектора в базисе
- Матрица перехода между базисами
- Критерий подпространства
- Достаточное условие линейной зависимости в n-мерном пространстве
- Три эквивалентных условия для базиса в n-мерном пространстве
- Критерий подпространства
- Совпадение размеров базисов
- Алгоритм выделения базиса из системы векторов
- Алгоритм выделения базиса из системы векторов
- Алгоритм дополнения линейно независимой системы до базиса

Тема «Определители матриц»

- Определители матрицы 2 на 2 и 3 на 3
- $i\,j$-ый минор матрицы
- $i\,j$-ое алгебраическое дополнение матрицы
- Невырожденная матрица
- Присоединённая матрица
- Формула разложения определителя по строке
- Изменение определителя при элементарных преобразованиях
- Определитель транспонированной матрицы
- Определитель произведения матриц
- Критерий обратимости в терминах определителя
- Определитель верхнетреугольной и нижнетреугольной матриц
- Связь линейной зависимости и определителя
- Линейность определителя по строке
- Метод Крамера
- Определитель обратной матрицы
- Явные формулы обратной матрицы (через алгебраические дополнения)
- Определитель произведения матриц
- Критерий обратимости в терминах определителя
- Метод Крамера
- Определитель обратной матрицы
- Явные формулы обратной матрицы
- Определитель Вандермонда

Тема «Фундаментальная система решений»

- Строчный ранг матрицы
- Базисный минор

– Фундаментальная система решений
– Тривиальная оценка на ранг матрицы
– Теорема о базисном миноре
– Наличие ненулевого решения системы в терминах ранга
– Размерность пространства решений однородной системы
– Связь решений однородной и неоднородной системы
– Теорема Кронекера-Капелли
– Размерность ФСР
– Наличие ненулевого решения системы в терминах ранга
– Теорема Кронекера-Капелли

Тема «Сумма и пересечение подпространств»

– Пересечение подпространств
– Пример, когда объединение подпространств — не подпространство
– Сумма подпространств
– Прямая сумма двух подпространств
– Теорема о неполном базисе
– Связь размерности суммы и пересечения подпространств (Формула Грассмана)
– Алгоритм поиска ФСР
– Алгоритм поиска скелетного разложения

Примерные вопросы для семинаров (основной уровень)

2 семестр

Билинейные и квадратичные формы

1. Что такое билинейная форма и как её матрица связана с симметричностью и кососимметричностью?
2. Объясните понятия ортогональных дополнений и невырожденности билинейной формы, и приведите пример невырожденной формы.
3. Докажите теорему о двойственности на подпространствах для билинейных форм.
4. Какие матричные характеристики являются инвариантами билинейной формы (ранг, невырожденность), и почему след не является?
5. Как разложить любую билинейную форму в сумму симметрической и кососимметрической частей?
6. Что происходит с ограничением билинейной формы на подпространство и когда оно невырожденно?
7. Опишите диагонализуемость симметрических форм и метод Якоби для их диагонализации.
8. Классифицируйте симметричные билинейные формы над алгебраически замкнутым полем и над полем вещественных чисел, включая сигнатуру.
9. Свяжите квадратичные формы с билинейными и объясните геометрический смысл сигнатуры.
10. Примените критерий Сильвестра для определения положительной определённости квадратичной формы над R.

Евклидовы пространства

1. Что такое евклидова норма вектора и неравенство Коши-Буняковского?
2. Как определить угол между векторами в евклидовом пространстве и теорему Пифагора?

3. Опишите процесс ортогонализации Грама-Шмидта и QR-разложение.
4. Что такое проекция и ортопроекция, и приведите формулу БАБА для проектора.
5. Как вычислить расстояние между вектором и подпространством, и угол между ними?
6. Объясните метод наименьших квадратов и его связь с проекциями.
7. Что такое матрица Грама и как она используется для k-мерных объёмов?
8. Как изменяется объём под действием линейного отображения и при смене образующих параллелепипеда?
9. Определите ориентированный n-мерный объём и его связь с определителем.
10. Как классифицировать евклидовы пространства и свести их к школьной геометрии?

Геометрия малых размерностей

1. Как определить угол между двумя прямыми в R^2 и их параллельность?
2. Опишите проекцию вектора на прямую в R^3 и формулу для ортопроектора.
3. Решите задачу на нахождение расстояния от точки до плоскости в R^3.
4. Как найти угол между вектором и плоскостью в R^3?
5. Приведите пример ортогонализации в R^2 с помощью Грама-Шмидта.
6. Вычислите объём параллелепипеда, заданного векторами в R^3.
7. Как определить, является ли система векторов в R^2 ортонормированной?
8. Решите геометрическую задачу: найдите проекцию точки на прямую в R^2.
9. Опишите вращение в R^2 как ортогональный оператор и его матрицу.
10. Найдите расстояние между двумя параллельными плоскостями в R^3.

Линейные операторы

1. Что такое матрица линейного оператора и как она меняется при смене базиса?
2. Перечислите характеристики линейного оператора: след, определитель, характеристический многочлен и т.д.
3. Объясните критерии обратимости линейного оператора и связь с инвариантными подпространствами.
4. Что такое собственные значения и векторы, и когда оператор диагонализуем?
5. Докажите связь между алгебраической и геометрической кратностями собственных значений.
6. Опишите сопряжённое отображение и самосопряжённые операторы в евклидовом пространстве.
7. Как привести квадратичную форму к главным осям с помощью самосопряжённых операторов?
8. Перечислите семь эквивалентных условий для ортогонального оператора.
9. Опишите теорему о сингулярных базисах (SVD) и её применение к низкоранговому приближению.
10. Как классифицировать ортогональные операторы в R^2 и R^3?

ЖНФ (жорданова нормальная форма)

1. Что такое утверждение о подстановке оператора во взаимно простые многочлены?

2. Объясните теорему о разложении пространства в прямую сумму корневых подпространств.
3. Как описать инвариантные подпространства через геометрический смысл кратностей корней?
4. Определите жорданов базис и жорданову нормальную форму (ЖНФ).
5. Докажите теорему о ЖНФ для нильпотентных операторов и формулу для количества клеток.
6. Опишите теорему о ЖНФ для произвольного оператора и разложение Шура.
7. Что такое отношение равенства по модулю подпространства и линейная независимость по модулю?
8. Приведите алгоритм поиска жорданова базиса "сверху вниз" на примере.
9. Как использовать элементарные преобразования цепочек для построения ЖНФ?
10. Классифицируйте линейные операторы по их ЖНФ и объясните единственность.

Примерные задания по контрольной работе

1. Реши систему $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Выпиши базис решений (ФСР) соответствующей однородной системы $A\mathbf{x} = 0$;
   Найди решения неоднородной системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
   Запиши решения неоднородной СЛУ через ФСР, через базис, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & -9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

3. Дана матрица $A \in$ M3 3(R).

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

   1. Найди LU-разложение для A.
   2. Найди разложение A в произведение элементарных матриц.
   3. Найди определитель матрицы A.
4. Запиши матрицу линейного оператора поворота на 30 градусов в R^2.
5. В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы векторы

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   1. Проверь, что $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ формируют базис в $\mathbb{R}^3$.
   2. Найди матрицу перехода от стандартного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ к базису $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ и матрицу перехода в обратном направлении.
   3. Найди координаты векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ в базисе $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$.
6. Проверь, является ли отображение линейным. φ: $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4}$, где

$\varphi(f) = f' + f(2) - fg + (fh)'$
$g = 2 + x + x^4$, $h = x + x^2$

7. Посчитай определитель матрицы A ∈ $M_{n\,n}$(R):

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & x \end{pmatrix}$$

Примерные домашние задания

Домашнее задание по теме: «Системы линейных уравнений. Операции над матрицами»

1. Реши системы, используя метод Гаусса (и прямой, и обратный ход).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 7x_4 = -2. \end{cases}$$

2. Найди многочлен с вещественными коэффициентами $f \in \mathrm{R}[x]$ второй степени такой, что $f(1) = 8$, $f(-1) = 2$, $f(2) = 14$.
3.

Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

вычисли следующее выражение:

$$\mathrm{tr}(AB - B^T A^T + I_2) I_3 + BA.$$

4. Для матриц A, B ∈ $M_{n\,n}$(R) определим операцию [A, B] = AB−BA. Проверь, что для любых матриц A, B, C ∈ $M_{2\,2}$(R) верно, что $[A, [B, C]^2] = 0$. (Указание: сначала найди [B, C], затем посчитай $[B, C]^2$, а потом вычисли уже итоговое выражение).

Домашнее задание по теме: «Векторные пространства»

1. Даны векторы

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Среди этих векторов найди базис их линейной оболочки и вырази оставшиеся вектора через базисные.

Указание: постарайся ответить на оба вопроса, используя один и тот же процесс приведения к ступенчатому виду с помощью метода Гаусса.

2. Проверь, являются ли следующие векторы линейно независимыми. Если являются, то дополни их до базиса всего пространства R^4:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

3. В пространстве R^3 заданы векторы

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Проверь, что $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ формируют базис в R^3.

2. Найди матрицу перехода от стандартного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ к базису $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ и матрицу перехода в обратном направлении.

3. Найди координаты векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ в базисе $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$.

4. Рассмотрим в качестве векторного пространства $V = \{f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}\}$. Проверь, лежит ли заданный вектор в указанной линейной оболочке. Найди его координаты в указанном базисе.

   1. $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ в базисе $\{\sin(x), \cos(x)\}$.
   2. $\frac{1}{x^3 - 7x^2 + 12x}$ в базисе $\left\{\frac{1}{x}, \frac{1}{x-3}, \frac{1}{x-4}\right\}$.

5. Дополни систему многочленов $\{x^5 + x^4, x^5 - 3x^3, x^5 + 2x^2, x^5 - x\}$ до базиса пространства $\mathrm{R}[x]_{\leqslant 5}$.

Домашнее задание по теме: «Фундаментальная система решений. Сумма и пересечение подпространств»

1. Найди базис векторного пространства $\mathrm{U} = \{\mathbf{y} \in \mathrm{R}^5 \mid A\mathbf{y} = \mathbf{0}\}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Определи, можно ли из системы векторов

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

выбрать ФСР для системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 &= 0, \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 0. \end{cases}$$

3. Найди скелетное разложение матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 8 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Найди решения неоднородной системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ через базис решений (ФСР)соответствующей однородной системы $A\mathbf{x} = 0$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & -9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

5. Найди ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 7 & 4 & 9 \\ 8 & -1 & 6 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Домашнее задание по теме: «Собственные векторы и собственные значения»

1. Найди собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Являются ли операторы в R^4 со следующими матрицами диагонализируемыми?

   1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & & 5 \\ & -1 & & \\ & 2 & 1 & 4 \\ & & & -1 \end{pmatrix}$; 2. $B = \begin{pmatrix} 1 & & 2 & 3 \\ & -1 & & -2 \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$.

   Если нет, то объясни почему. Если да, то найди:
   а) базис, в котором оператор имеет диагональный вид;
   б) сам диагональный вид.
   Здесь пропуски в матрицах – это нули.
3. Какие из следующих матриц подобны? В случаях подобия укажи, с помощью какой матрицы можно из одной получить другую:

   1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; 3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Для каждого из следующих линейных операторов в R^3 найди его матрицу в стандартном базисе, собственные значения и собственные подпространства для вычисленных собственных значений.
   1. Отражение относительно плоскости xy.
   2. Ортогональная проекция на плоскость xz.
   3. Поворот против часовой стрелки вокруг положительной оси x на угол 90°.
5. Для диагонализируемой матрицы A найти sin (A) и cos (A), если

   $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

   Проверь, выполняется ли равенство $\sin^2(A) + \cos^2(A) = I$.

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю) 2 семестр

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1	Укажите ранг билинейной формы, заданной матрицей 3×3 с тремя ненулевыми собственными значениями.	3	ОПК-1
2	Назовите свойство билинейной формы, если её матрица равна транспонированной матрице.	симметричность	ОПК-1
3	Как называется сумма симметрической и кососимметрической частей билинейной формы?	билинейная форма	ОПК-1
4	Сколько собственных значений у симметрической билинейной формы размерности 4 над C?	4	ОПК-1
5	Назовите признак квадратичной формы, если её матрица положительно определённа.	положительная определённость	ПК-1
6	Сколько положительных слагаемых в сигнатуре квадратичной формы с индексом положительности 2 и отрицательности 1?	2	ПК-1
7	Как называется метод приведения симметрической матрицы к диагональному виду?	метод Якоби	ОПК-4
8	Укажите число векторов в ортонормированном базисе евклидова пространства размерности 5.	5	ОПК-4
9	Чему равна длина единичного вектора в евклидовом	1	ПК-1

	пространстве?		
10	Как называется неравенство, связывающее скалярное произведение и нормы векторов?	Коши-Буняковского	ПК-1
11	Сколько векторов содержит ортогональная система в R^3?	3	ОПК-1
12	Назовите формулу, которая выражает ортопроекцию вектора на подпространство через матрицу оператора.	формула Атата	ОПК-4
13	Как называется процесс построения ортонормированного базиса из линейно независимых векторов?	ортогонализация Грама-Шмидта	ПК-1.3
14	Укажите число измерений пространства, если параллелепипед, построенный на трёх векторах, имеет объём 0.	3	ОПК-1
15	Как называется линейный оператор, заданный матрицей, обратной к данной?	обратный оператор	ОПК-1
16	Сколько собственных значений у диагонализуемого оператора размерности 4 над C?	4	ПК-1
17	Назовите минимальный многочлен оператора, если его характеристический многочлен равен $(\lambda-2)^3(\lambda+1)$.	$(\lambda-2)^a(\lambda+1)^b$, где $a,b \leq 3$ и $a,b \geq 1$	ПК-1
18	Как называется оператор, равный своему сопряжённому в евклидовом пространстве?	самосопряжённый (симметрический) оператор	ОПК-4
19	Сколько клеток в жордановой нормальной форме нильпотентного оператора размерности 4 с индексом нильпотентности 3?	2	ПК-1
20	Как называется базис, в котором матрица оператора имеет жорданову нормальную форму?	жорданов базис	ПК-1