ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДЕНА

Решением Ученого совета
АНО ВО «Центральный университет»
«24» июня 2025 г.
Протокол №2

Рабочая программа дисциплины (модуля)
«Основы тензорных вычислений»

Направление подготовки: *02.03.01 Математика и компьютерные науки*

Направленность (профиль) подготовки: *Математика и искусственный интеллект*

Квалификация (степень) выпускника: *бакалавр*

Форма обучения: *очная*

Срок освоения программы: *4 года*

Год набора: *2025*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0215B0C000D1B3FEB44A37EE631E0C27D4
Владелец: Ивашкевич Евгений Васильевич
Действителен: с 13.01.2026 до 13.04.2027

Электронный документ

Москва
2025

Содержание

1. **Краткая характеристика дисциплины (модуля)** 3
2. **Перечень планируемых результатов обучения** 5
3. **Тематический план** 7
4. **Содержание дисциплины (модуля)** 8
5. **Учебно-методическое обеспечение** 9
6. **Материально-техническое обеспечение** 10
7. **Методические и оценочные материалы** 11

1. Краткая характеристика дисциплины (модуля)

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Основы тензорных вычислений» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Математика и искусственный интеллект», утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 807 от 23.08.2017 года.

Изучение дисциплины (модуля) «Основы тензорных вычислений» позволяет овладеть инструментом для описания многомерных физических систем, анализа больших данных и построения моделей глубокого обучения; они позволяют работать в координатно-независимом виде и эффективно использовать современное аппаратное обеспечение (GPU, распределённые кластеры).

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина (модуль) включена в учебный план по программе подготовки бакалавриата по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Математика и искусственный интеллект» и входит в вариативную часть Блока 1, формируемую участниками образовательных отношений, как дисциплина по выбору.

Дисциплина (модуль) является выборной и доступна для изучения на 3 или 4 курсе в 6, 7 семестрах на выбор после успешного освоения дисциплин: «Основы математического анализа и линейной алгебры» или «Математический анализ» и «Линейная алгебра и геометрия» или «Математический анализ. Продвинутый уровень» и «Линейная алгебра и геометрия. Продвинутый уровень».

Цель изучения дисциплины (модуля): формирование у студентов целостного представления о тензорах как многомерных линейных объектах, научить их формировать, преобразовывать и применять в аналитических выводах и численных алгоритмах, а также освоить практическую реализацию в Python/NumPy, TensorFlow, PyTorch.

Задачи изучения дисциплины (модуля):

— определить ранг, контравариантные/ковариантные индексы, правила преобразования при смене системы координат, свойства симметрии и анти-симметрии;

— выполнять сложение, внешнее и внутреннее умножение, конракцию, подъем/опускание индексов, использовать произведение Кронекера и операции симметризации/антиссимметризации;

— выводить тензоры градиента, Якоби, Гессиана; применять правила дифференцирования тензоров, тензорные формы теорем Грина, Стокса, дивергенции и ротора;

— научиться моделировать напряжения и деформации в механике, строить тензорные фильтры в обработке изображений, решать задачи рекомендаций и факторизации данных, применять тензорные методы в численном решении уравнений в частных производных.

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен:

знать:

— основные понятия тензорных вычислений: скаляр, вектор, матрица, тензор, порядок тензора, форма тензора, ось, индекс;

— правила выполнения базовых операций над тензорами: сложение, умножение, транспонирование, перестановка осей, reshape, broadcasting;

— принципы индексной записи тензорных выражений и соглашение Эйнштейна о суммировании;

— основные виды тензорных свёрток и их связь с матричным умножением, скалярным произведением и линейными отображениями;

— базовые принципы автоматического дифференцирования и применения тензоров в машинном обучении;

уметь:

— определять форму тензоров на каждом этапе вычислений и проверять корректность операций по размерностям;

— переводить простые тензорные выражения между математической записью, индексной записью и программной реализацией;

— выполнять основные тензорные операции в NumPy, PyTorch или аналогичных библиотеках;

— использовать broadcasting, reshape, transpose, permute, sum, einsum и tensordot для решения практических задач;

— реализовывать простые вычислительные графы и применять autograd для нахождения производных;

владеть:

— навыками работы с многомерными массивами и тензорами в современных вычислительных библиотеках;

— приёмами анализа и отладки ошибок, связанных с несовпадением размерностей тензоров;

— базовыми методами векторизации вычислений и оптимизации тензорного кода;

— навыками применения тензорных операций в задачах машинного обучения, обработки изображений, последовательностей и табличных данных;

— навыками самостоятельного чтения документации и математических текстов, использующих тензорную и индексную нотацию.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) при проведении учебных занятий в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками Университета и в форме самостоятельной работы обучающихся:

Компетенция	Содержание компетенции	Индикатор компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)
УК-6.	Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.1.	Знает основные принципы самовоспитания и самообразования, профессионального и личностного развития, исходя из этапов карьерного роста и требований рынка труда
		УК-6.2.	Умеет планировать свое рабочее время и время для саморазвития. формулировать цели личностного и профессионального развития и условия их достижения, исходя из тенденций развития области профессиональной деятельности, индивидуально-личностных особенностей
		УК-6.3.	Имеет практический опыт получения дополнительного образования, изучения дополнительных образовательных программ
ОПК-1.	Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики	ОПК-1.1.	Знает основные методы и подходы к решению задач прикладной и компьютерной математики, включая алгоритмы, математическое моделирование и теорию оптимизации, а также современные инструменты и технологии, используемые в этой области
		ОПК-1.2.	Умеет анализировать и формулировать математические задачи, применять соответствующие методы и алгоритмы для их решения, а также интерпретировать и представлять результаты в понятной и доступной форме
		ОПК-1.3.	Имеет практический опыт работы над проектами или исследованиями в области прикладной и компьютерной математики, включая участие в конкурсах, олимпиадах или научных публикациях, где были решены актуальные и значимые задачи
ПК-1.	Способен определять общие формы и закономерности области машинного обучения	ПК-1.1.	Знает основные теоретические концепции и принципы, относящиеся к области машинного обучения, а также ключевые закономерности и модели, которые помогают в анализе и интерпретации данных
		ПК-1.2.	Умеет проводить систематический анализ области разработки, выявлять и формулировать общие закономерности и тенденции, а также применять

			методы исследования для получения новых знаний и понимания
		ПК-1.3.	Имеет практический опыт работы в области машинного обучения, включая участие в научных проектах, исследованиях или практических заданиях, где были выявлены и описаны общие формы и закономерности
ПК-2.	Способен решать типовые задачи профессиональной деятельности в области профессиональной деятельности, опираясь на информационную и библиографическую культуру, используя информационно-коммуникационные технологии и учитывая основные требования информационной безопасности	ПК-2.1.	Знает основы информационной и библиографической культуры, а также принципы информационной безопасности и применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности
		ПК-2.2.	Умеет эффективно использовать информационно-коммуникационные технологии для решения стандартных задач профессиональной деятельности, учитывая требования информационной безопасности
		ПК-2.3.	Имеет опыт работы с информационными ресурсами и технологиями в области профессиональной деятельности, включая соблюдение норм информационной безопасности
ПК-3.	Способен применять методы математического и алгоритмического моделирования для решения как теоретических, так и практических задач в рамках профессиональной деятельности	ПК-3.1.	Знает основные методы математического и алгоритмического моделирования, а также их применение для решения теоретических и прикладных задач
		ПК-3.2.	Умеет применять методы математического и алгоритмического моделирования для анализа и решения различных задач в области математики и компьютерных наук
		ПК-3.3.	Имеет опыт использования методов математического и алгоритмического моделирования при решении теоретических и прикладных задач в профессиональной деятельности

3. Тематический план

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Трудоемкость, академические часы				ТКУ (текущий контроль успеваемости)
		Очная форма				
		Аудиторная работа		Контроль	Самостоятельная работа	
		Лекции	Семинары			
1	Математическая база и мотивация тензорных вычислений	4	4		30	Домашнее задание Аудиторная работа
2	Основные операции над тензорами	10	10	2	30	Контрольная работа
3	Тензорные разложения и вычислительная эффективность	10	10	2	30	Домашнее задание Аудиторная работа
4	Прикладные тензорные вычисления	6	6	2	30	Контрольная работа
	Зачет с оценкой			6		Коллоквиум
	Итого:	***30***	***30***	***10***	***120***	
Объем дисциплины (модуля) (в ак. ч.)		***190***				
Объем дисциплины (модуля) (в зач. ед.)		***5***				

4. Содержание дисциплины (модуля)

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Содержание дисциплины (модуля) по темам
1	Математическая база и мотивация тензорных вычислений	Введение в тензорные вычисления. Повторение линейной алгебры Матрицы как частный случай тензоров Многомерные массивы и формы данных
2	Основные операции над тензорами	Понятие тензора. Компоненты тензора в базисе Ковариантные и контравариантные индексы. Тензоры порядка 0, 1, 2 и выше. Поэлементные операции Свёртки и сокращение индексов. Контрольная работа 1 Тензорное произведение и изменение порядка осей
3	Тензорные разложения и вычислительная эффективность	Нормы векторов, матриц и тензоров. Норма Фробениуса. Расстояния между тензорами. Потери в задачах машинного обучения. Производные тензорных выражений. Дифференцирование сложной функции в тензорной записи. Основы автоматического дифференцирования. Коллоквиум Тензорные разложения. Сингулярное разложение как матричное разложение. Идея снижения размерности
4	Прикладные тензорные вычисления	Тензоры в машинном обучении Тензоры в нейронных сетях Оптимизация тензорных вычислений. Контрольная работа 2

5. Учебно-методическое обеспечение

Университет располагает полным набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, включая продукты отечественного производства.

Каждый студент в течение всего периода обучения получает индивидуальный неограниченный доступ к электронно-библиотечной системе и электронной информационно-образовательной среде университета. Эти системы предоставляют возможность доступа к ресурсам из любой точки, где есть подключение к сети Интернет, как на территории университета, так и за его пределами.

Студентам обеспечен удаленный доступ к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Основная литература:

1. Мусин, Ю. Р. Тензорный анализ. Вводный курс с приложениями к анализу и геометрии : учебник для вузов / Ю. Р. Мусин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 184 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-06198-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/585823

2. Фоменко, Т. Н. Высшая математика. Общая алгебра. Элементы тензорной алгебры : учебник и практикум для вузов / Т. Н. Фоменко. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 121 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08097-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/585939

Дополнительная литература:

1. Кашапова, Ф. Р. Высшая математика. Общая алгебра в задачах : учебник для вузов / Ф. Р. Кашапова, И. А. Кашапов, Т. Н. Фоменко. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 128 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-09499-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/585819

6. Материально-техническое обеспечение

Университет располагает материально-технической базой, соответствующей действующим противопожарным правилам и нормам и обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работ обучающихся, предусмотренных учебным планом.

Помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского (практического) типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Изучение дисциплины (модуля) обеспечивается в учебных аудиториях, оснащенных:

— столами и стульями;
— компьютерной техникой;
— механическими калькуляторами;
— специализированным оборудованием, включая демонстрационное оборудование.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, в том числе приспособленные для использования инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Обучающимся предоставляется доступ (в том числе удаленный) к ресурсам информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронным ресурсам (в том числе электронным библиотечным системам, современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам):

№	Наименование портала (издания, курса, документа)	Ссылка
1.	Научная электронная библиотека elibrary.ru библиотека	https://elibrary.ru/defaultx.asp
2.	База данных для IT-специалистов	https://habr.com
3.	База данных ScienceDirect	https://www.sciencedirect.com
4.	Официальный сайт Министерства науки и высшего образования Российской Федерации	https://minobrnauki.gov.ru/
5.	Федеральный портал «Российское образование"	https://www.edu.ru/
6.	Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"	http://window.edu.ru/
7.	Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов	http://school-collection.edu.ru/
8.	Федеральный центр информационно - образовательных ресурсов	http://fcior.edu.ru/

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модуле), в том числе комплект лицензионного программного обеспечения, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Наименование ПО	Производство	Лицензионное / свободно распространяемое
Операционные системы:		
Microsoft Imagine (Windows Client, Server)	зарубежное	лицензионное

Браузеры:		
Яндекс.Браузер	отечественное	свободно распространяемое
Google Chrome	зарубежное	свободно распространяемое
Офисные приложения:		
Microsoft Imagine (Visio, OneNote)	зарубежное	лицензионное
TeXstudio	зарубежное	свободно распространяемое
Adobe Acrobat Reader	зарубежное	свободно распространяемое
Программное обеспечение для планирования и учета времени:		
Toggle app	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления проектами:		
Microsoft Imagine (Project)	зарубежное	лицензионное
Системы управления базами данных:		
Microsoft Imagine (SQL Server)	зарубежное	лицензионное
Системы резервного копирования (backup):		
Acronis Backup Advanced for HyperV	зарубежное	лицензионное
Справочно-правовые системы:		
КонсультантПлюс: справочно-правовая система	отечественное	лицензионное
Средства антивирусной защиты:		
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный Russian Edition	отечественное	лицензионное
Среды разработки:		
Visual Studio Code	зарубежное	свободно распространяемое
Bash (Unix shell)	зарубежное	свободно распространяемое
Anaconda	зарубежное	свободно распространяемое
Robotic Operating System	зарубежное	свободно распространяемое
CopelliaSim	зарубежное	свободно распространяемое
Google Colaboratory	зарубежное	свободно распространяемое
Пакеты программных средств и библиотек:		
AutoPsy	зарубежное	свободно распространяемое
Interactive Disassembler (IDA)	зарубежное	свободно распространяемое
Системы управления библиографической информацией:		
Zotero	зарубежное	свободно распространяемое
Сервисы и службы:		
Bind	зарубежное	свободно распространяемое
Docker	зарубежное	свободно распространяемое

7. Методические и оценочные материалы

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В процессе изучения дисциплины (модуля) «Основы тензорных вычислений» в рамках текущего контроля успеваемости используются такие виды учебной работы, как лекция, семинары, аудиторная работа, контрольные работы и домашние задания, коллоквиум, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся по заданию преподавателя, направленные на развитие навыков профессиональной лексики, закрепление практических профессиональных компетенций, поощрение инициатив.

Лекция – систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем учебного материала, как правило, теоретического характера.

В процессе лекций рекомендуется вести конспект лекций: кратко и схематично фиксировать основные идеи, выводы и обобщения лекции; выделять важные мысли, ключевые слова и термины. Необходимо отметить вопросы или материалы, которые вызывают затруднения, и попытаться найти ответы в рекомендованной литературе. Если разобраться в материале не удается, следует сформулировать вопрос и задать его

преподавателю на консультации или во время семинарского (практического) занятия.

Семинар — это форма учебной деятельности, проводимая в учебном заведении под руководством преподавателя, где студенты активно участвуют в обсуждениях, практических заданиях и других формах взаимодействия.

Для успешной подготовки к семинару рекомендуется заранее ознакомиться с темой занятия и основными материалами, чтобы иметь возможность активно участвовать в обсуждении. Также полезно подготовить вопросы и идеи для обсуждения, что поможет глубже понять материал и продемонстрировать заинтересованность.

Аудиторная работа – активная работа студента на семинаре, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии.

Для успешного участия в семинаре студентам рекомендуется заранее ознакомиться с темой обсуждения, прочитать необходимые материалы и подготовить вопросы. Важно активно слушать и вовлекаться в дискуссию, высказывая свои мнения и аргументируя их. При ответах на вопросы преподавателя стоит быть уверенным, четким и логичным, опираясь на изученный материал. Также полезно поддерживать диалог с однокурсниками, чтобы обогатить обсуждение и расширить свои знания.

Домашнее задание – набор задач по темам недели.

При работе над домашними заданиями важно внимательно ознакомиться с требованиями и сроками выполнения. Рекомендуется разбивать задания на этапы, чтобы избежать перегрузки и лучше усвоить материал. Использовать различные источники информации, включая учебники и онлайн-ресурсы, для более глубокого понимания темы.

Контрольная работа – письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время.

Цель контрольной работы - получить специальные знания по одной или нескольким темам дисциплины (модуля) и продемонстрировать навыки их практического применения.

Коллоквиум – устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее.

В процессе подготовки к коллоквиуму необходимо проанализировать учебные материалы, ознакомившись с лекциями, учебниками и дополнительными источниками, акцентируя внимание на ключевых темах. Рекомендуется создать структурированные конспекты, выделяя основные идеи, термины и формулы.

Самостоятельная работа – работа студентов, направленная на углубленное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины (модуля).

В процессе самостоятельной работы студенты взаимодействуют с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Задачи студента включают работу с конспектами лекций (обработка текста), повторное изучение учебных материалов планов и тезисов ответов, изучение дополнительных тем, выполнение учебно-исследовательских заданий и другое.

Система оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Критерии получения уровня и оценивания сформированности компетенций по дисциплине (модуле) «Основы тензорных вычислений»

Оценивание уровня учебных достижений, обучающихся по дисциплине (модулю), осуществляется в виде текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю) осуществляется в форме ***зачета с оценкой***, при этом проводится оценка компетенций, сформированных по дисциплине.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации используется десятибалльная шкала оценивания, которая соотносится с традиционной пятибалльной шкалой следующим образом, если иное не указано в силлабусе дисциплины:

Десятибалльная оценка	**Пятибалльная оценка**	**Оценка за зачет**	**Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)**
10	Отлично	Зачтено	Студент полностью владеет знаниями, изложенными в рабочей программе, и глубоко осмысляет дисциплину. Он самостоятельно и логически последовательно отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее важном. Умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя ключевые моменты и устанавливая причинно-следственные связи. Четко формулирует ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты дисциплины (модуля) с практическими задачами.
9	Отлично	Зачтено	
8	Отлично	Зачтено	
7	Хорошо	Зачтено	Студент обладает знаниями предмета почти в полном объеме рабочей программы и самостоятельно, логически последовательно и всесторонне отвечает на все вопросы, акцентируя внимание на наиболее значимых моментах. Он умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделяя его ключевые аспекты и устанавливая причинно-следственные связи. Формулирует свои ответы, уверенно интерпретирует результаты анализов и других исследований, а также решает сложные ситуационные задачи. Студент хорошо знаком с методами исследования, необходимыми для практической деятельности, и умеет связывать теоретические аспекты предмета с практическими задачами.
6	Хорошо	Зачтено	
5	Удовлетворительно	Зачтено	Студент обладает базовыми знаниями

Десятибалльная оценка	Пятибалльная оценка	Оценка за зачет	Общая характеристика результата обучения по дисциплине (модулю)
4	Удовлетворительно	Зачтено	по дисциплине (модулю), но испытывает трудности при самостоятельных ответах и использует неточные формулировки. В ходе ответов он допускает ошибки, касающиеся сути вопросов. Студент способен решать только самые простые задачи и владеет лишь минимальным набором методов исследования.
3	Не сдан	Не зачтено	Студент не овладел обязательным минимумом знаний по предмету и не может ответить на вопросы, даже если преподаватель задает дополнительные наводящие вопросы.
2	Не сдан	Не зачтено	
1	Не сдан	Не зачтено	

Дисциплина (модуль) «Основы тензорных вычислений» оценивается следующим образом:

Активность	Вес	Количество	Описание
Домашние задания	25%	10	Набор задач по темам недели
Контрольные работы	35%	2	Письменная работа с набором задач, которые нужно решить за ограниченное время
Аудиторная работа	15%	15	Активная работа студента на семинаре или лекции, его ответы на вопросы преподавателя и участие в дискуссии
Зачет с оценкой	25%	1	Коллоквиум - устные ответы на вопросы, список которых известен студенту заранее

Формула расчёта итоговой оценки по дисциплине (модуле) «Основы тензорных вычислений»: «0,25× среднее за домашние задания + 0,35× среднее за контрольные работы + 0,15 ×за аудиторную работу + 0,25 ×зачет с оценкой».

Текущий контроль успеваемости обучающихся по дисциплине (модуле)

Примерные вопросы для семинаров

1. Сформулировать определение тензора, его ранг и различие между контравариантными и ковариантными индексами.
2. Объяснить правило Эйнштейна (суммирование по повторяющимся индексам) и привести пример – скалярное произведение двух векторов.
3. Показать, как из произвольного 2-тензора получить симметричную и анти-симметричную части; указать, какие свойства сохраняются.
4. Записать формулу Кронекерова произведения двух матриц $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$; указать размеры полученного тензора.
5. Продемонстрировать, как метрический тензор g_{ij} переводит контравариантный вектор в ковариантный и наоборот (подъём и опускание индексов).
6. Описать свойства тензора Леви-Чивита (полная анти-симметричность, нормировка) и объяснить, почему он удобен для вычисления векторного произведения в трёхмерном пространстве.
7. Объяснить, почему тензор деформации ε_{ij} симметричен, а тензор вращения ω_{ij}

анти-симметричен.

8. Сравнить разложения CANDECOMP/PARAFAC (CP) и Tucker: указать различия в структуре ядра и факторных матриц.

9. Пояснить, как условие Джонса-Лина «почти-ортогональная проекция» обеспечивает сохранение евклидовых расстояний в случайных проекциях (sketching).

10. Описать преимущества применения тензорных разложений (например, Tensor-Train) при построении компактных сверточных слоёв нейронных сетей.

Примерные задания по контрольной работе

1. **Тензорные операции**

a) Для векторов $u=(1,2,3)^\top$ и $v=(4,0,-1)^\top$ запишите внешнее (Кронекерово) произведение $u \otimes v$.

b) Сократите тензор $Tijk=AijBjk$ по индексу j (операция контракции) и укажите полученный порядок.

2. **Подъём/опускание индексов**

Дана метрика gij=diag(1,2,3). Поднимите индекс у ковариантного вектора wi=(2,-1,5) и запишите полученный контравариантный вектор wi.

3. **Симметризация/анти-симметризация**

Для тензора Tij=(0-221) найдите его симметричную часть Sij и анти-симметричную часть Aij.

4. **Тензорный градиент и Гессиан**

Пусть скалярное поле $f(x,y)=x2y+3y2$.

a) Запишите тензор градиента ∂if.

b) Запишите тензор Гессиана $\partial i\partial jf$.

5. **Разложение CP**

Тензор порядка 3 размера 2×2×2 задан элементами $Xijk=aibjck$ с векторами $a=(1,2)^\top$, $b=(0,1)^\top$, $c=(3,-1)^\top$.

Укажите его CP-разложение (факторы и ранговый тензор).

6. **Тензор-Тейлор**

Для функции $g(\mathbf{x})=\exp(x1+2x2)$ запишите первое-порядковое тензор-Тейлор-разложение в окрестности точки $\mathbf{x}0=(0,0)$.

7. **Тензорная регрессия (ridge-регуляризация)**

Даны данные $X \in R3\times2$ и целевой вектор $y \in R3$.

a) Запишите нормальное уравнение для решения $w^\wedge$ с L2-регуляризацией λ.

b) Вычислите $w^\wedge$ при $\lambda=1$ (численные значения).

8. **Случайные проекции**

Сгенерируйте случайную матрицу $R \in R5\times10$ с элементами, распределёнными нормально N(0,1).

a) Вычислите приближённый проекционный образ матрицы $A \in R10\times10$ (заданной) как $A \approx ARR^\top$.

b) Оцените относительную ошибку $\|A-ARR^\top\|F/\|A\|F$.

Примерные домашние задания

1. **Реализация базовых тензорных операций**

— Напишите функции **outer(u, v)**, **contract(T, axis1, axis2)**, **raise_index(v, g)** и **lower_index(v, g)** для произвольных размеров.

— Протестируйте их на случайных векторах/тензорах и сравните результаты с аналогами из **numpy.einsum**.

2. **Симметризация и анти-симметризация**

— Создайте функцию **symmetrize(T)** и **antisymmetrize(T)** для 2-тензоров.

— Сгенерируйте случайный тензор размера 4×4, проверьте, что **symmetrize(T)+antisymmetrize(T)** восстанавливает исходный тензор.

3. **Тензор-Тейлор для вектор-полей**

— Для функции $h(\mathbf{x})=\sin(x1)\cos(x2)$ реализуйте автоматическое вычисление градиента и Гессиана с помощью **autograd** (или **jax**).

— Сравните полученные тензоры с аналитическими выражениями в точке $(\pi/4,\pi/3)$.

4. **CP-разложение на практике**

— С помощью библиотеки **tensorly** реализуйте CP-разложение тензора размера 30×30×30 (генерируйте случайный тензор ранга 5).

— Оцените погрешность приближения при разных значениях ранга (от 1 до 10) и постройте график «ранг – ошибка».

5. **Tucker-разложение и сжатие изображений**

— Возьмите цветное изображение (например, **astronaut** из **skimage**).

— Представьте его как тензор $H\times W\times 3$ и выполните Tucker-разложение с разными ранговыми параметрами $(r1,r2,r3)$.

— Восстановите изображение и измерьте PSNR относительно оригинала; продемонстрируйте результаты в виде таблицы и нескольких картинок.

6. **Регуляризованная тензорная регрессия**

— Сгенерируйте набор наблюдений $\{(X(i),y(i))\}i=1N$, где каждый $X(i)\in R4\times 4$ и $y(i)\in R$.

— Постройте линейную модель $y(i)=\langle W,X(i)\rangle+\varepsilon$ и найдите коэффициентный тензор W с L2-регуляризацией, решая нормальное уравнение $(\sum X(i)\otimes X(i)+\lambda I)\mathrm{vec}(W)=\sum y(i)\mathrm{vec}(X(i))$.

— Проанализируйте влияние параметра λ на переобучение (разбейте данные на обучающую/валидационную части).

7. **Случайные проекции (sketching) для больших матриц**

— Сгенерируйте разрежённую матрицу $A\in R10000\times 5000$ (плотность ≈ 0.1 %).

— Реализуйте алгоритм «Random Gaussian Sketch»: выберите матрицу $R\in R5000\times k$ с $k=200$, вычислите $A'=AR$.

— Оцените качество приближения $A\approx A'R\top$ через относительную ошибку Фробениуса; сравните с обычным SVD-аппроксимацией ранга k.

8. **Применение тензорных методов к графам**

— Сгенерируйте случайный неориентированный граф из 50-й вершин (используйте **networkx**).

— Постройте тензор смежности порядка 3, где третий индекс – тип ребра (например, «дружба», «работа», «семья» – задайте случайно).

— Выполните CP-разложение этого тензора и интерпретируйте полученные факторные матрицы как «сообщества» и «типы связей».

Задания для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Задание	Ответ	Компетенция
1	укажите определение **тензора** (что хранит в себе многомерный массив чисел).	упорядоченный набор чисел $ai1$ $i2…ik$, где k – порядок (ранг) тензора	УК-6
2	назовите, как называется порядок (ранг) тензора, если в нём k индексов.	ранг (order)	УК-6
3	укажите различие между **контравариантным** и **ковариантным** индексом (одно слово).	позиция	УК-6

4	запишите **правило преобразования** контравариантных индексов при переходе к новой системе координат $x'i=Aij$ xj.	$T'i=AijTj$	ПК-2
5	укажите, как называется **операция согласования (контракции)** двух индексов тензора.	свертка	ПК-3
6	запишите формулу **внешнего (каратечного) произведения** двух векторов u и v.	$(u⊗v)ij=uivj$	ПК-2
7	назовите **символ Кронекера** $δij$ и его значение (одно слово).	единица	ОПК-1
8	назовите **символ Леви-Чивиты** $εijk$ и его основное свойство (одно слово).	полностью-антисимметричный	ОПК-1
9	укажите, как называется **правило Эйнштейна** (одним словом).	суммирование	ОПК-1
10	запишите **операцию поднятия индекса** с помощью метрического тензора gij для ковариантного вектора vj.	$vi=gijvj$	ПК-1
11	укажите, как называется **операция понижения индекса** с помощью gij для контравариантного вектора wj.	$wi=gijwj$	ПК-1
12	назовите **третий-порядковый** тензор, часто используемый в механике сплошных сред (одно слово).	деформация	ПК-1
13	укажите, как называется **симметризация** тензора Tij (одно слово).	симметрия	ПК-2
14	укажите, как называется **анти-симметризация** тензора Tij (одно слово).	антисимметрия	ПК-2
15	назовите **разложение ТЕНЗОР-ТЕЙЛОР** первой степени для скалярного поля $f(x)$ (коротко).	$f(x+Δx)=f(x)+∂i$ $fΔxi+O(\|Δx\|2)$	ПК-2
16	укажите, как называется **разложение** тензора A в виде суммы **ранговых** тензоров (одно слово).	CP-разложение	ПК-3
17	назовите **метод** вычисления **тензорного разложения Хосаке** (одно слово).	Tucker	ПК-3
18	укажите, как называется **тензор** , определяющий внутреннее произведение в римановой геометрии.	метрический	ПК-3
19	назовите **физический объект** , описывающий распределение внутренних сил в упругом теле (одно слово).	напряжение	ОПК-1
20	укажите **область применения** тензорных вычислений в **машинном обучении** (одно слово).	рекомендация	ПК-1