Стереометрия на ВсОШ и других олимпиадах

ДОЛЕДЕНОК АЛЕКСЕЙ ВАДИМОВИЧ

Тренер сборной Москвы на ВсОШ по математике,
руководитель учебно-методического отдела
АНО «Сириус.Курсы»

О чём будем говорить

О чём будем говорить

- НЕ о ЕГЭ-подобной стереометрии и НЕ о стереометрии со вступительных олимпиад

О чём будем говорить

- НЕ о ЕГЭ-подобной стереометрии и НЕ о стереометрии со вступительных олимпиад
- НЕ о комбинаторной стереометрии

О чём будем говорить

- НЕ о ЕГЭ-подобной стереометрии и НЕ о стереометрии со вступительных олимпиад
- НЕ о комбинаторной стереометрии

- О «геометрической» стереометрии (в стиле той, что бывает на РЭ и ЗЭ ВсОШ)

Сириус
Курсы

Стереометрия — маленькая, но гордая тема

Стереометрия — маленькая,
но гордая тема

Где есть «геометрическая» стереометрия

- Этапы ВсОШ
- Турнир городов
- Московская математическая олимпиада
- Санкт-Петербургская олимпиада по математике
- Олимпиада Шарыгина, Устная олимпиада по геометрии
- Кубок Колмогорова
- Точечно другие олимпиады и турниры (Южный математический турнир, Высшая проба и т. д.)

Где есть «геометрическая» стереометрия

Сириус Курсы

	РЭ ВсОШ	ЗЭ ВсОШ	ММО	Устный Турнир	СПбМО
	0,73	0,60	1,00	0,87	0,33
2026		ждём :)	1	1	
2025	1	1	1	1	
2024	1		1	1	
2023		1	1	1	
2022	1		1	1	
2021	1	1	1		1
2020	1	—	1	1	
2019	1	1	1	1	
2018	1	1	1	1	
2017			1	1	1
2016	1	1	1	1	1
2015	1		1	1	
2014	1	1	1	1	
2013		1	1		1
2012	1	1	1	1	1

Номер стереометрии на ВсОШ

	РЭ ВсОШ	ЗЭ ВсОШ
2025	3	2
2024	3	
2023		2
2022	3	
2021	4	2
2020	4	—
2019	5	4
2018	5	2

В каких странах есть стереометрия

- 🇷🇺 Россия — с запасом топ-1
- 🇵🇱 Польша
- 🇷🇴 Румыния
- 🇩🇪 Германия

Раньше была в существенно большем числе стран.
И на IMO была

В чём сложность

В чём сложность

- Трудно нарисовать картинку, многое приходится держать в голове

В чём сложность

- Трудно нарисовать картинку, многое приходится держать в голове

❗ Но в 11 классе уже не должно быть проблемой

В чём сложность

Сириус Курсы

- Трудно нарисовать картинку, многое приходится держать в голове

  ❗ Но в 11 классе уже не должно быть проблемой

- Как и в любом новом типе задач, непонятно как и куда думать, что работает, а что нет

В чём сложность

Сириус Курсы

- Трудно нарисовать картинку, многое приходится держать в голове

  ❗ Но в 11 классе уже не должно быть проблемой

- Как и в любом новом типе задач, непонятно как и куда думать, что работает, а что нет

  ❗ Теории сверх школьной программы мало. При наличии геометрической базы достаточно прорешать штук 30–40 задач

Параллели с планиметрией

Важно проводить параллели между планиметрическими и стереометрическими утверждениями в стиле «тут сработало и тут тоже»/«тут сработало, а тут нет», делая акцент там, где интуиция плохо работает

Параллели с планиметрией

Важно проводить параллели между планиметрическими и стереометрическими утверждениями в стиле «тут сработало и тут тоже»/«тут сработало, а тут нет», делая акцент там, где интуиция плохо работает

- Один тетраэдр лежит внутри другого. Верно ли, что у внутреннего тетраэдра сумма длин рёбер не больше, чем у внешнего?

Параллели с планиметрией

Важно проводить параллели между планиметрическими и стереометрическими утверждениями в стиле «тут сработало и тут тоже»/«тут сработало, а тут нет», делая акцент там, где интуиция плохо работает

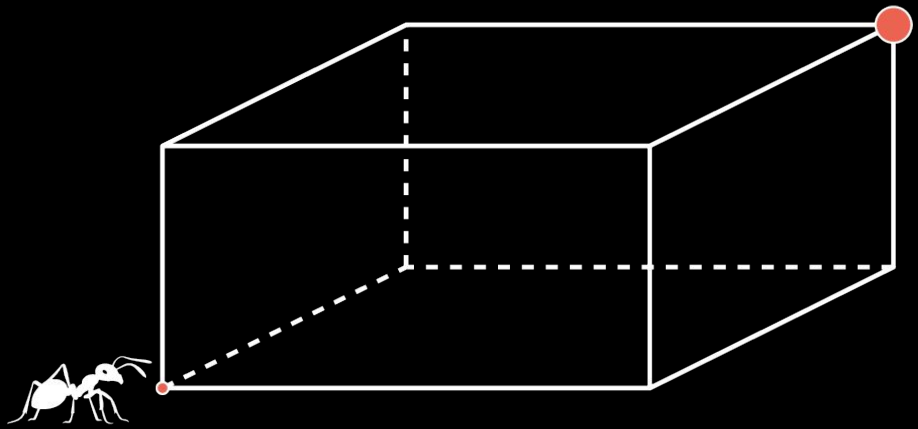
- Один тетраэдр лежит внутри другого. Верно ли, что у внутреннего тетраэдра сумма длин рёбер не больше, чем у внешнего?

  ❗ Мораль: тут лучшим аналогом будет площадь поверхности

Параллели с планиметрией

Сириус Курсы

- *(Тургор 2003)* Дана коробка (прямоугольный параллелепипед), по поверхности которой ползает муравей. Изначально муравей сидит в углу. Верно ли, что среди всех точек поверхности на наибольшем расстоянии от муравья находится противоположный угол?



Параллели с планиметрией

- В пространстве определено изогональное сопряжение относительно тетраэдра. На плоскости при изогональном сопряжении относительно треугольника образом его описанной окружности будет бесконечно удалённая прямая. А в пространстве для равногранного тетраэдра?

Параллели с планиметрией

- В пространстве определено изогональное сопряжение относительно тетраэдра. На плоскости при изогональном сопряжении относительно треугольника образом его описанной окружности будет бесконечно удалённая прямая. А в пространстве для равногранного тетраэдра?

❗ Мораль: даже если что-то переносится из планиметрии, свойства могут сильно поменяться

Аналог плоской задачи

Многие стереометрические задачи вдохновлены плоской задачей. Иногда, если решить плоский аналог, то это может помочь решить пространственную задачу

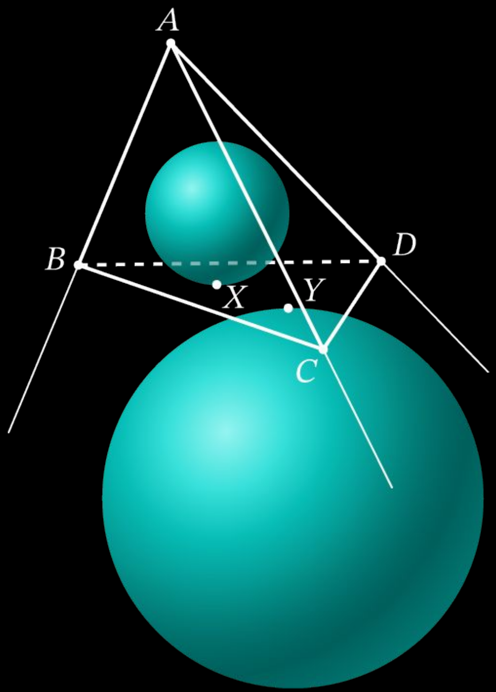
Аналог плоской задачи

Многие стереометрические задачи вдохновлены плоской задачей. Иногда, если решить плоский аналог, то это может помочь решить пространственную задачу

❗ Но не все плоские решения переносятся! Например, счёт углов как правило не переносится

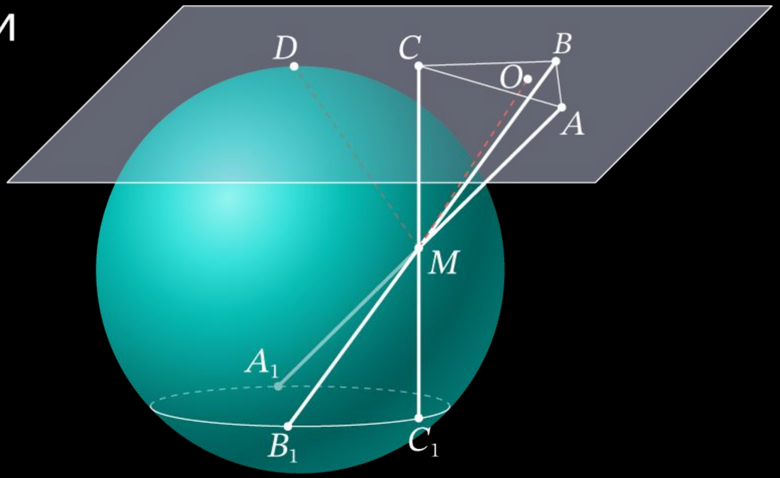
Аналог плоской задачи. Тривиальный

(ЗЭ ВсОШ 2013, 11-2)
Вписанная и вневписанная сферы треугольной пирамиды $ABCD$ касаются её грани BCD в различных точках X и Y.
Докажите, что треугольник AXY тупоугольный.



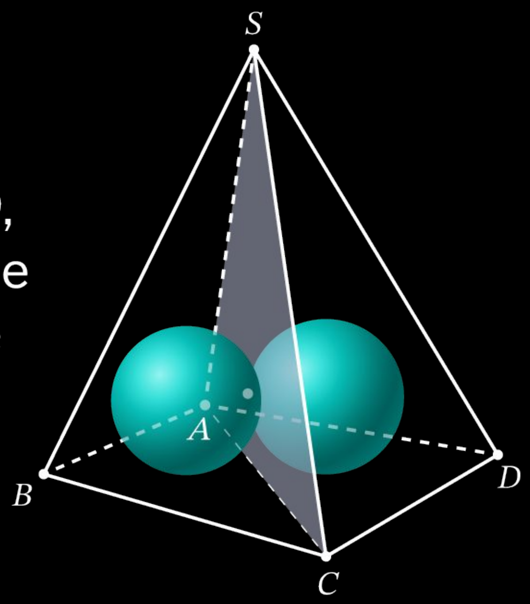
Аналог плоской задачи. Поинтереснее

(РЭ ВсОШ 2024, 11-8)
В пространстве расположены отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 с общей серединой M. Оказалось, что сфера ω, описанная около тетраэдра $MA_1B_1C_1$, касается плоскости ABC в точке D.
Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.
Докажите, что $MO = MD$.



Аналог плоской задачи. Ещё интереснее

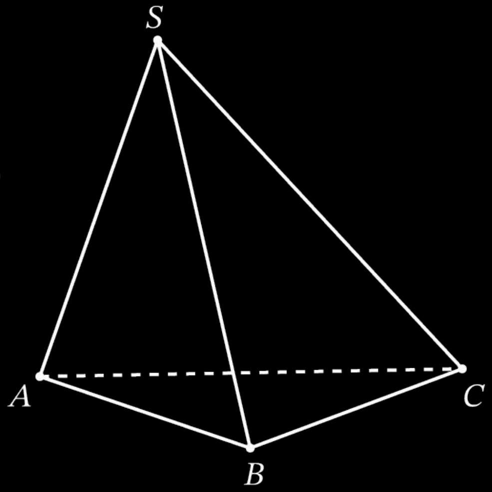
(ММО 2026, 11-6)
В основании выпуклой четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны, а никакие две стороны не равны. Известно, что вписанные сферы тетраэдров $SABC$ и $SACD$ касаются. Докажите, что вписанные сферы тетраэдров $SABD$ и $SBCD$ касаются.



Аналог плоской задачи. Ещё интереснее

Естественно, плоский аналог помогает не всегда

(РЭ ВсОШ 2021, 11-4)
Треугольная пирамида $SABC$ вписана в сферу Ω.
Докажите, что сферы, симметричные Ω
относительно прямых SA, SB, SC
и плоскости ABC, имеют общую точку.



Сферы

Сферы

- Пересечение сферы и плоскости, двух сфер — это окружность, центр — проекция центра сфер

Сферы

- Пересечение сферы и плоскости, двух сфер — это окружность, центр — проекция центра сфер
- Касательные к сфере: есть плоскости и прямые. У двух сфер есть общие касательные. Плоскости ведут себя привычно, а прямые — не особо

Сферы

- Пересечение сферы и плоскости, двух сфер — это окружность, центр — проекция центра сфер
- Касательные к сфере: есть плоскости и прямые. У двух сфер есть общие касательные. Плоскости ведут себя привычно, а прямые — не особо
- Вписанных углов нет (кроме прямых)

Сферы

- Пересечение сферы и плоскости, двух сфер — это окружность, центр — проекция центра сфер
- Касательные к сфере: есть плоскости и прямые. У двух сфер есть общие касательные. Плоскости ведут себя привычно, а прямые — не особо
- Вписанных углов нет (кроме прямых)
- Как можно доказывать, что точки на одной сфере лежат: прямые углы, пересекающиеся и касающиеся окружности

Сферы

Сириус Курсы

- Пересечение сферы и плоскости, двух сфер — это окружность, центр — проекция центра сфер
- Касательные к сфере: есть плоскости и прямые. У двух сфер есть общие касательные. Плоскости ведут себя привычно, а прямые — не особо
- Вписанных углов нет (кроме прямых)
- Как можно доказывать, что точки на одной сфере лежат: прямые углы, пересекающиеся и касающиеся окружности
- Степень точки есть. Есть радикальные плоскости и прямые

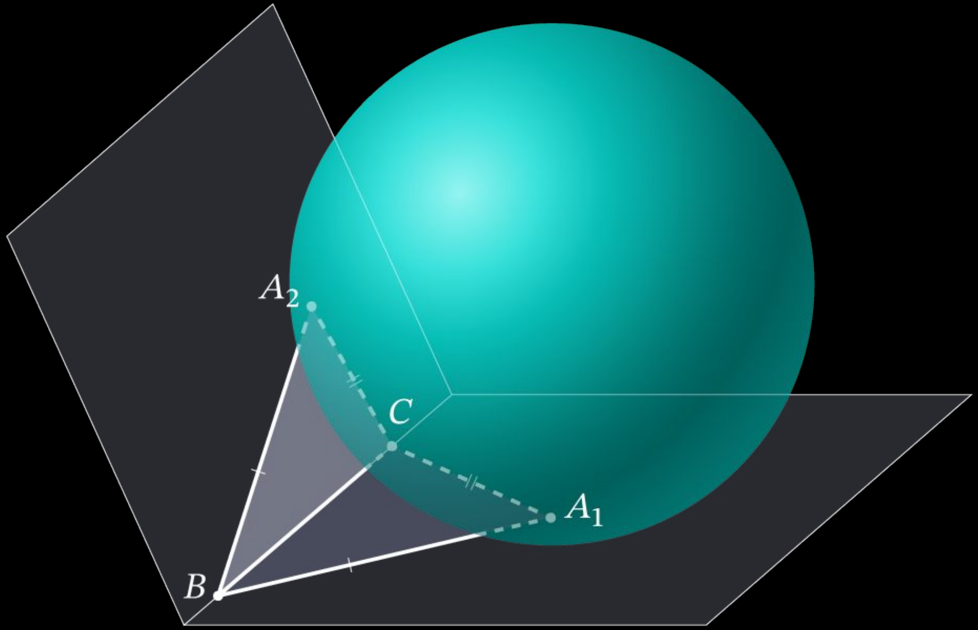
Сферы. Загибание треугольников

Точка касания вписанной сферы с гранью тетраэдра — любая. Это отличает её от описанной сферы, где центр хорошо привязывается к грани

Сферы. Загибание треугольников

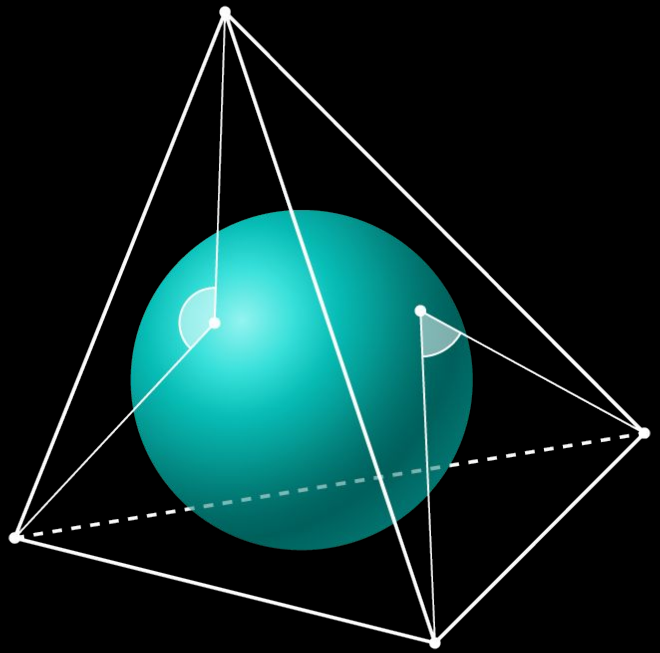
Сириус Курсы

Есть вот такие равные треугольники, из их равенства много всего следует



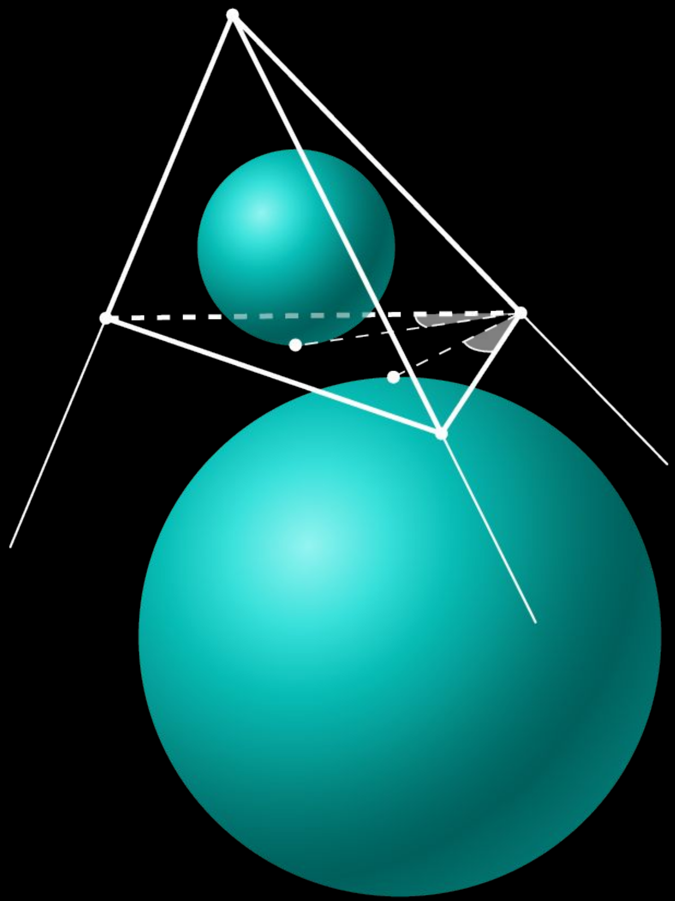
Сферы. Загибание треугольников

Например, это позволяет посчитать углы, которые образуют отрезки от вершины до точки касания с рёбрами. Например, можем из этого получить, что противоположные рёбра видны из точек касания под одинаковыми углами



Сферы. Загибание треугольников

С вневписанной сферой то же самое. Точки касания вписанной и вневписанной сфер с гранью изогонально сопряжены относительно неё. Ещё этот же факт можно увидеть из шаров Данделена



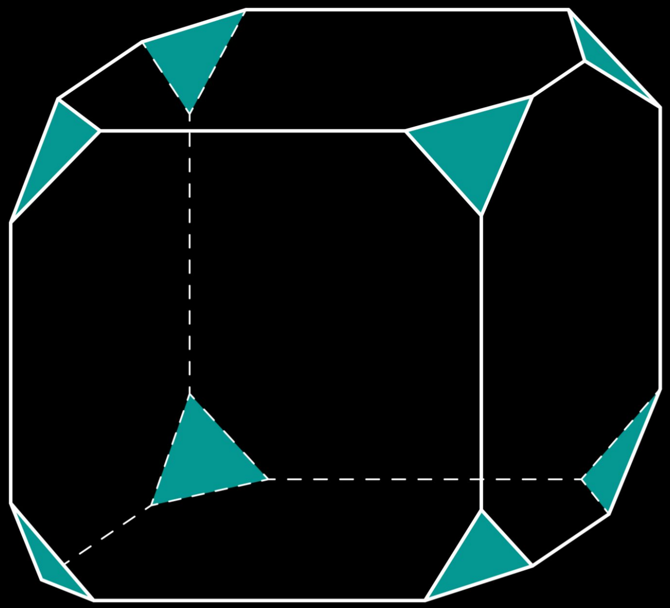
Сферы. Загибание треугольников

Существует комбинаторное (!) условие на выпуклый многогранник, при котором в него нельзя вписать сферу

Теорема. Грани выпуклого многогранника покрашены в 2 цвета. Оказалось, что

- никакие две чёрных грани не имеют общего ребра;
- чёрных граней больше половины.

Тогда в этот многогранник нельзя вписать сферу



Геометрия тетраэдра

Геометрия тетраэдра

- Есть медианы, а ещё бимедианы, все пересекаются в одной точке. Полезно рассмотреть в контексте описанного параллелепипеда

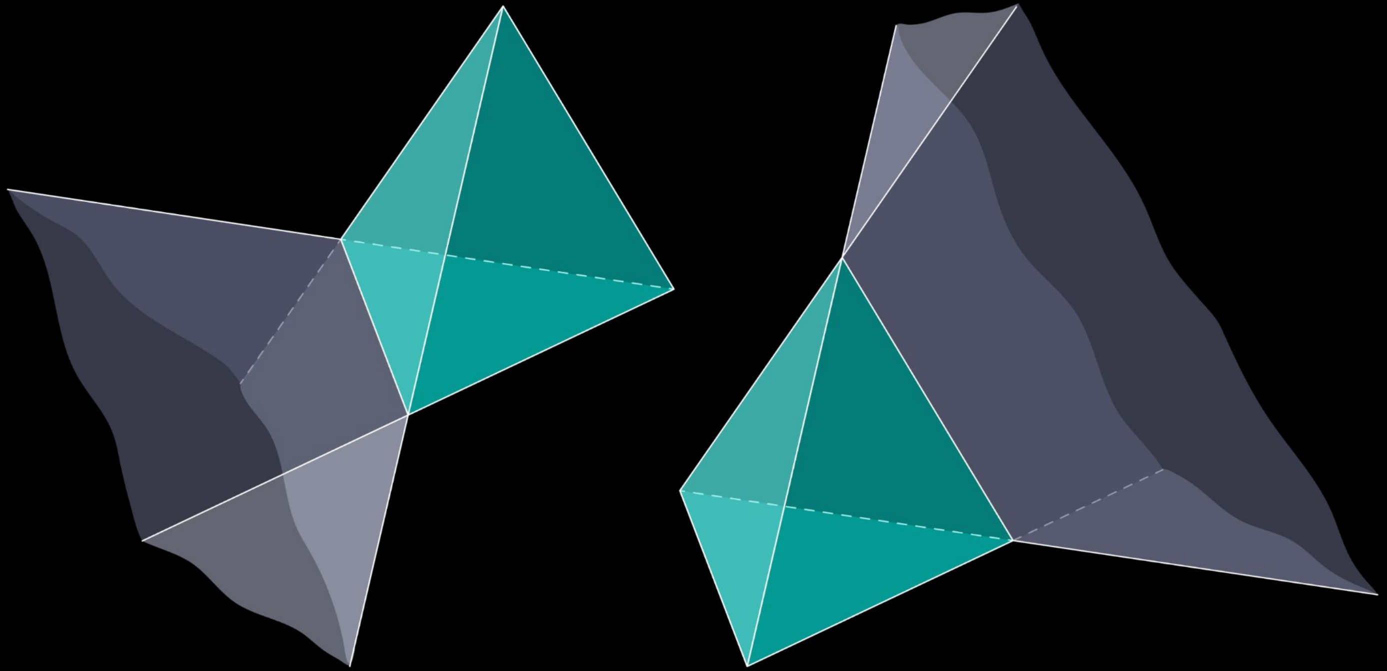
Геометрия тетраэдра

- Есть медианы, а ещё бимедианы, все пересекаются в одной точке. Полезно рассмотреть в контексте описанного параллелепипеда
- Есть вписанная и описанная сферы, а вот со вневписанными сложно

Геометрия тетраэдра. Вневписанные сферы

Сириус Курсы

В одну из таких областей почти всегда можно вписать одну сферу. Поэтому может существовать от 5 до 8 сфер, которые касаются всех плоскостей граней тетраэдра



Геометрия тетраэдра

- Есть медианы, а ещё бимедианы, все пересекаются в одной точке. Полезно рассмотреть в контексте описанного параллелепипеда
- Есть вписанная и описанная сферы, а вот со вневписанными сложно
- С высотами беда. Есть ортоцентрический тетраэдр

Геометрия тетраэдра

Сириус Курсы

- Есть медианы, а ещё бимедианы, все пересекаются в одной точке. Полезно рассмотреть в контексте описанного параллелепипеда
- Есть вписанная и описанная сферы, а вот со вневписанными сложно
- С высотами беда. Есть ортоцентрический тетраэдр
- Если замечательные точки совпадают, то не факт, что тетраэдр правильный — есть равногранный тетраэдр

Геометрия тетраэдра

- Есть медианы, а ещё бимедианы, все пересекаются в одной точке. Полезно рассмотреть в контексте описанного параллелепипеда
- Есть вписанная и описанная сферы, а вот со вневписанными сложно
- С высотами беда. Есть ортоцентрический тетраэдр
- Если замечательные точки совпадают, то не факт, что тетраэдр правильный — есть равногранный тетраэдр
- Сумма двугранных углов тетраэдра не фиксирована (лежит в интервале от 2π до 3π)

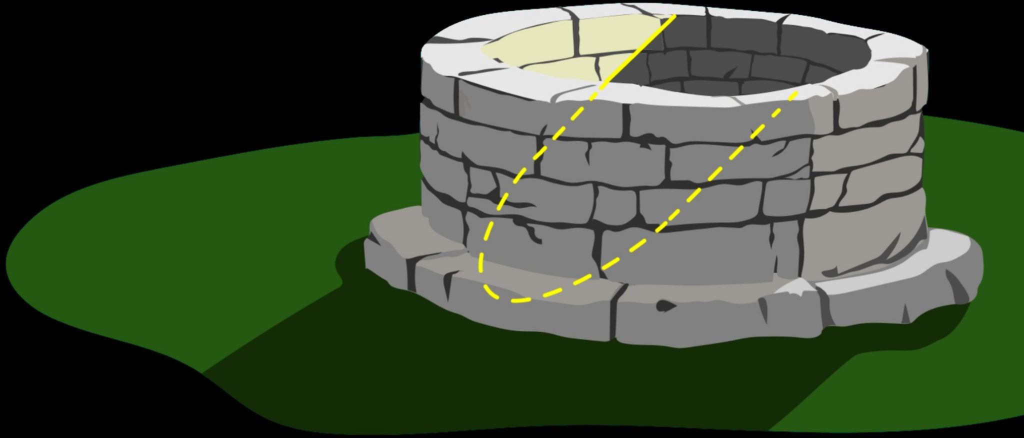
Геометрия тетраэдра

- Есть медианы, а ещё бимедианы, все пересекаются в одной точке. Полезно рассмотреть в контексте описанного параллелепипеда
- Есть вписанная и описанная сферы, а вот со вневписанными сложно
- С высотами беда. Есть ортоцентрический тетраэдр
- Если замечательные точки совпадают, то не факт, что тетраэдр правильный — есть равногранный тетраэдр
- Сумма двугранных углов тетраэдра не фиксирована (лежит в интервале от 2π до 3π)
- В принципе почти никакие «хорошие» факты про треугольник не переносятся. Например, лемма о трезубце не верна, аналога прямой Симсона нет

Задачи из жизни

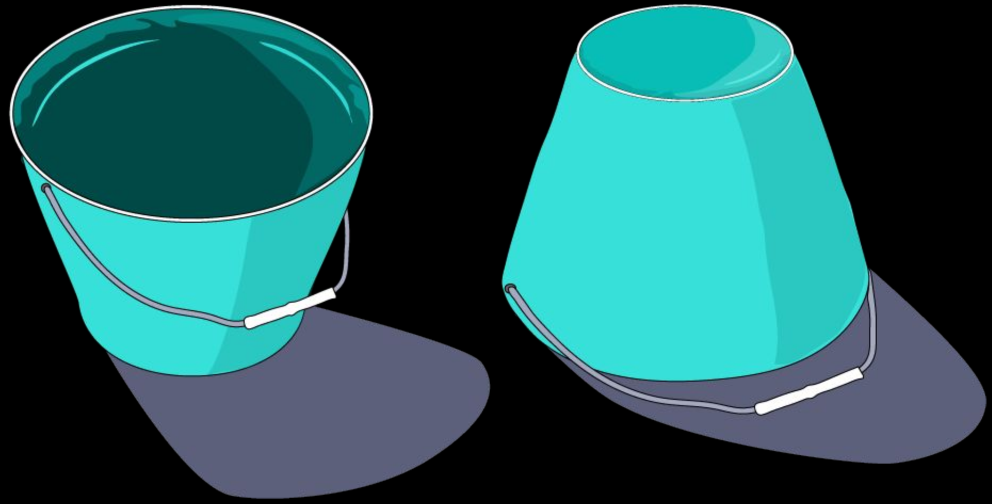
(*Устный тургор 2012*)

В цилиндрический колодец падает пучок параллельных лучей, причём ни одна точка дна не освещена. Докажите, что граница освещённой и неосвещённой областей колодца лежит в одной плоскости.



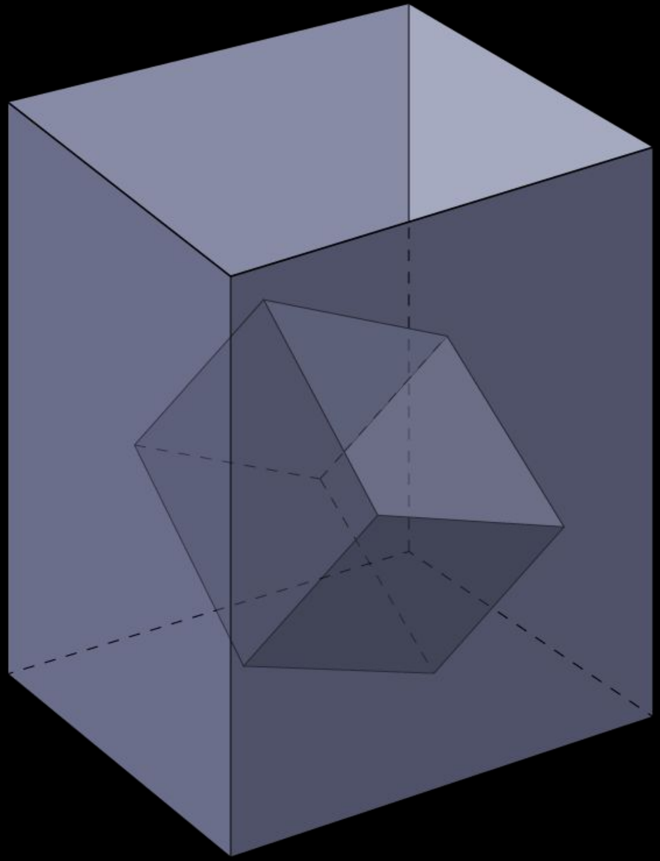
Задачи из жизни

(*Турнир 2025, весенний базовый тур*) На плоскости стояло ведро, верхнее основание больше нижнего. Ведро перевернули. Докажите, что площадь его видимой тени уменьшилась.



Задачи из жизни

(*Турнир 1998*) *Багаж в московском метро.* Будем называть «размером» прямоугольного параллелепипеда сумму трёх его измерений — длины, ширины и высоты. Может ли случиться, что в некотором прямоугольном параллелепипеде поместился больший по размеру прямоугольный параллелепипед?



Задачи из жизни

Сириус Курсы

(*Устный турнир 2015*) В кубическую коробку поместили 3 одинаковых шара. Докажите, что в точно такую же пустую коробку можно поместить 4 таких же шара.

Осталось за кадром

Сириус
Курсы

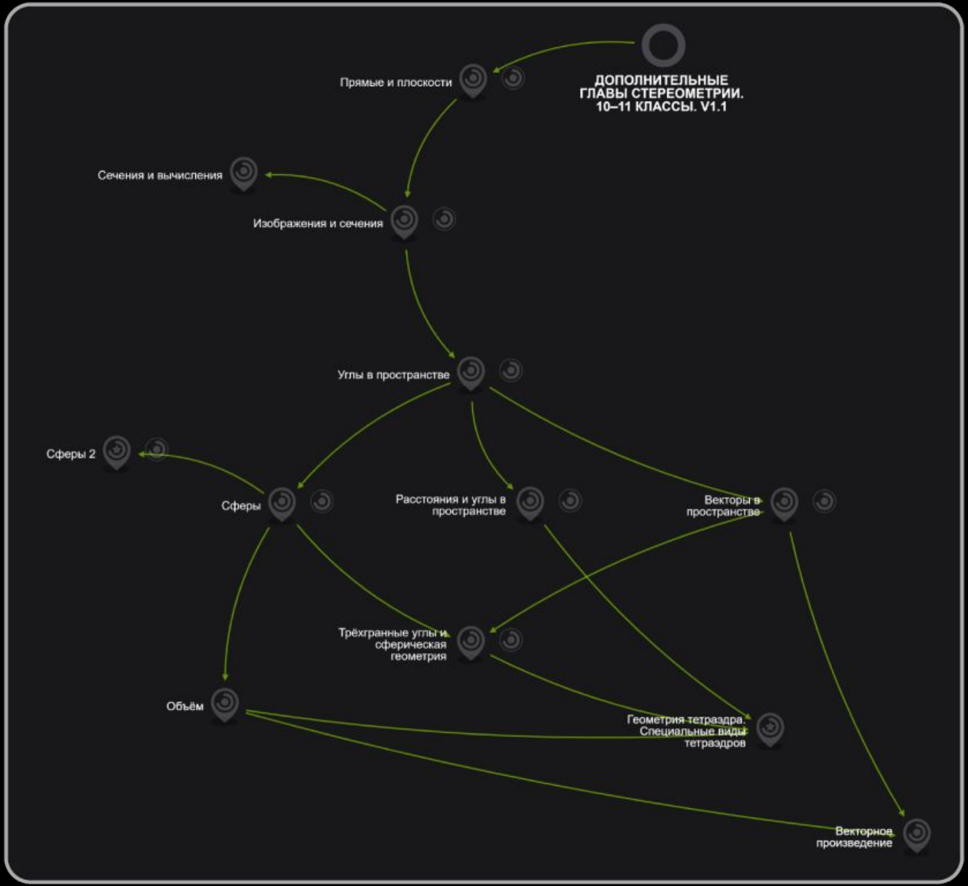
- Преобразования пространства. Движения есть. Из интересного — теперь поворот не относительно точки, а относительно прямой. А симметрия относительно прямой, плоскости и точки. Гомотетия есть. Инверсия есть, отлично работает (но она не обязательна)
- Развёртки. В двух контекстах: кратчайшее расстояние по поверхности и способ работы с условиями на грани тетраэдра
- Объём тетраэдра (особенно формула через радиус вписанной сферы)
- Базовая геометрия трёхгранного угла, связь со сферической геометрией
- Комбинаторная стереометрия: формула Эйлера, просто про многогранники

О чём не обязательно говорить

Сириус Курсы

- Счёт в координатах
- Все равносильные определения равногранного и ортоцентрического тетраэдров
- Сферическая геометрия и тригонометрия, теоремы синусов и косинусов для трёхгранного угла
- Объём и площадь поверхности тел вращения

Курс на Сириус.Курсах



edu.sirius.online/course/stereometry-10-11