

# О таблицах умножения

Александр Калмынин

Всероссийская олимпиада-2026  
17 апреля 2026

# 1. Задача о таблице умножения

Пусть  $N$  — натуральное число. Составим таблицу умножения  $N \times N$  и будем смотреть, сколько в ней различных чисел.

Обозначим это число  $M(N)$ . Как ведёт себя  $M(N)$  для больших  $N$ ? Из соображений симметрии ясно, что  $M(N) \leq \frac{N(N+1)}{2}$ .

Несложно проверить, что  $M(9) = 36$ : более двух раз появляются числа 4, 6, 8, 12, 16, 18, 24, 36. При помощи компьютера можно обнаружить, что

$$M(100) = 2906$$

$$M(1000) = 248083$$

$$M(10000) = 22504348$$

Видно, что отношение  $M(N)/N^2$  убывает, но довольно медленно. Может быть, в итоге получается какая-нибудь постоянная?

## 2. Основные результаты

### Теорема 1 (Эрдёш, 1960)

При  $N \rightarrow +\infty$  выполнено  $\frac{M(N)}{N^2} \rightarrow 0$ , то есть большинство чисел, не превосходящих  $N^2$ , не появляются в таблице умножения  $N \times N$ . Более того,

$$M(N) = \frac{N^2}{(\ln N)^{\delta+o(1)}},$$

где  $\delta = 1 - \frac{1+\ln \ln 2}{\ln 2} \approx 0.08607133$ .

Следует заметить, что функция  $\frac{1}{(\ln N)^\delta}$  убывает очень медленно и если поверить, что это правильная асимптотика, то чтобы добиться  $M(N) \leq 0.1N^2$  нам нужно выбрать  $N$  около  $10^{2 \cdot 10^{11}}$ .

## 2. Основные результаты

Вопрос о точном порядке  $M(N)$  при больших  $N$  решён Кевином Фордом в работе 2008 года:

### Теорема 2 (Форд)

*Справедливо соотношение*

$$M(N) \asymp \frac{N^2}{(\ln N)^\delta (\ln \ln N)^{3/2}}$$

Кстати, на данный момент неизвестно, существует ли предел отношения левой и правой частей этого утверждения.

### 3. Идея доказательства

Пусть  $\Omega(n)$  — количество простых делителей числа  $n$  с учётом кратности. Тогда оказывается, что у типичного числа  $n \leq N$  функция  $\Omega(n)$  ведёт себя как  $\ln \ln N$ . В частности, если  $a, b \leq N$ , то либо  $a$  или  $b$  нетипичны, либо  $ab$  нетипично среди чисел  $\leq N^2$ . В самом деле, если  $a$  и  $b$  типичны, то  $\Omega(ab) = \Omega(a) + \Omega(b) \approx 2 \ln \ln N$ , в то время как  $\ln \ln N^2 = \ln \ln N + \ln 2$ . Откуда берётся этот  $\ln \ln$ ? Рассмотрим гармоническое число

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}.$$

Оно ведёт себя как площадь под гиперболой, то есть  $\int_1^N \frac{du}{u} = \ln N$ . С другой стороны, можно написать произведение  $\prod_{p \leq N} (1 - \frac{1}{p})^{-1}$ , оно не меньше гармонического числа (но, как оказывается, не намного больше), поэтому сумма  $\sum_{p \leq N} \frac{1}{p}$  ведёт себя как  $\ln \ln N$  при больших  $N$ .

### 3. Идея доказательства

Далее,

$$\sum_{n \leq N} \Omega(n) = \sum_{p \leq N} \left[ \frac{N}{p} \right] + \sum_{p^2 \leq N} \left[ \frac{N}{p^2} \right] + \dots \sim N \ln \ln N,$$

поэтому поведение в среднем нам понятно. В действительности, для доказательства теоремы Эрдёша требуется более тонкий результат: пусть  $\pi_k(N)$  есть количество чисел  $n \leq N$  таких, что  $\Omega(n) = k$ . Тогда

$$\pi_k(N) \asymp \frac{N(\ln \ln N)^{k-1}}{(k-1)! \ln N}$$

при  $k \leq 100 \ln \ln N$ . Доказывать это можно так: числа, которые мы считаем, имеют вид  $p_0 p_1 \dots p_{k-1}$ . Для фиксированных  $p_1, \dots, p_{k-1}$  подходящих  $p_0$  будет  $\pi(N/p_1 \dots p_{k-1}) \approx N/(p_1 \dots p_{k-1} \ln N)$ . Далее нужно понять, что

$$\sum_{p_1, \dots, p_{k-1} \leq N} \frac{1}{p_1 \dots p_{k-1}} \approx \frac{1}{(k-1)!} \left( \sum_{p \leq N} \frac{1}{p} \right)^{k-1},$$

откуда и получается требуемое.

### 3. Идея доказательства

Говорят, что случайная величина  $X$  имеет пуассоновское распределение с интенсивностью  $\lambda$ , если она принимает целые неотрицательные значения и

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}.$$

Поскольку  $\exp(\ln \ln N) = \ln N$  мы, в сущности, увидели, что  $\Omega(n) - 1$  имеет пуассоновское распределение с интенсивностью  $\ln \ln N$ . Если же эту величину отнормировать и рассмотреть  $\frac{\Omega(n) - \ln \ln N}{\sqrt{\ln \ln N}}$ , то Эрдёш и Кац доказали, что она будет вести себя уже как величина с нормальным распределением:

$$\mathbb{P}(a \leq \xi \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx.$$

Подобные вероятностные модели встречаются в теории чисел повсюду и вдохновляют многие открытия.

### 3. Идея доказательства

Зададимся теперь параметром  $\lambda$  и воспользуемся таким наблюдением: если  $a, b \leq N$ , то либо  $\Omega(a) + \Omega(b) \leq 2\lambda \ln \ln N$ , либо  $\Omega(ab) \geq 2\lambda \ln \ln N$ , поэтому

$$M(N) \leq \sum_{k+l \leq 2\lambda \ln \ln N} \pi_k(N)\pi_l(N) + \sum_{m \geq \lambda \ln \ln N} \pi_m(N^2).$$

Оптимизация по  $\lambda$  показывает, что надо выбрать  $\lambda = \frac{1}{2 \ln 2}$ . Далее,  $x! \approx x^x / e^x \cdot x^{O(1)}$ , поэтому здесь получается ответ:

$$M(N) \ll (\ln \ln N)^C \frac{N^2}{\ln N} \frac{(\ln \ln N)^{2\lambda \ln \ln N}}{(2\lambda \ln \ln N)!} = (\ln \ln N)^C \frac{N^2}{\ln N} (\ln N)^{2\lambda - 2\lambda \ln 2\lambda}$$

Величина  $1 - 2\lambda + 2\lambda \ln 2\lambda$  как раз и оказывается равна нашему  $\delta$ .

## 4. Другие таблицы умножения

В доказательстве Форда используется более тонкое наблюдение: простые делители  $p_1, \dots, p_m$  чисел  $n$ , дающих наибольший вклад в  $M(N)$ , удовлетворяют  $\ln \ln p_j \sim \frac{j}{m} \ln \ln N$ . Оказывается, можно рассматривать и многомерные таблицы умножения, тогда:

**Теорема 3 (Форд, Кукулопулос)**

*Количество элементов  $M_k(N)$  в  $k$ -мерной таблице умножения  $N \times \dots \times N$  удовлетворяет*

$$M_k(N) \asymp \frac{N^k}{(\ln N)^{Q((k-1)/\ln k)} (\ln \ln N)^{3/2}},$$

где  $Q(t) = t \ln t - t + 1$ .

Также можно выбрать множество  $\mathcal{A}$  и спросить, как много чисел из него появляются в таблице умножения  $N \times N$ .

**Теорема 4 (Кукулопулос)**

*Количество  $M(N; P_a)$  чисел вида  $p + a$  в таблице умножения  $N \times N$  по порядку равно  $\frac{M(N)}{\ln N}$ .*

# Спасибо за внимание!



Paul Erdős in 1958.

