

Плоские разбиения

Глеб Ненашев

Департамент Математики и Компьютерных Наук, СПбГУ

Москва, Апрель , 2026

Диаграммы Юнга

Definition

Диаграмма Юнга это конечный набор ячеек или клеток, выровненных по левой границе, в котором длины строк образуют невозрастающую последовательность $|\lambda|$ это количество клеток в диаграмме λ .

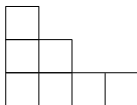


Рис.: $7=4+2+1$

Полустандартная таблица Юнга

Definition

Полустандартная таблица Юнга это диграмма Юнга с числами в каждой клетке такая что

- (1) числа не строго возрастают в строках и
- (2) строго возрастают в столбцах.

5	6					
4	4	6	6			
2	3	5	5			
1	2	2	3	3	5	

Рис.: Полустандартная таблица Юнга

Стандартная таблица Юнга

Definition

Стандартная таблица Юнга это диграмма Юнга из n клеток с числами в каждой клетке такая что

- (1) каждое число от 1 до n встречается ровно один раз
- (2) числа строго возрастают в строках и в столбцах.

7				
3	6			
1	2	4	5	8

Рис.: Стандартная таблица Юнга

Theorem

Дана диаграмма λ из n клеток. Количество стандартных диаграмм Юнга для λ равно

$$\frac{n!}{\prod h(\square)},$$

где произведение по всем крюкам.

2	1		
5	4	2	1
6	5	3	2

Плоское разбиение

Definition

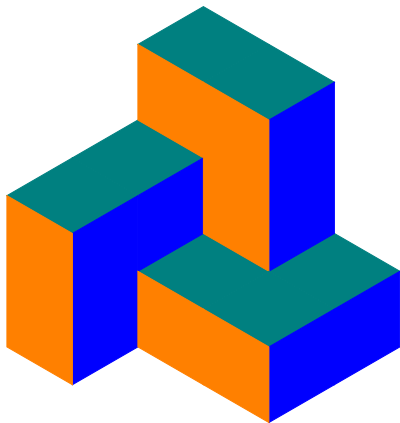
Плоское разбиение это диграмма Юнга с числами в каждой клетке такая что

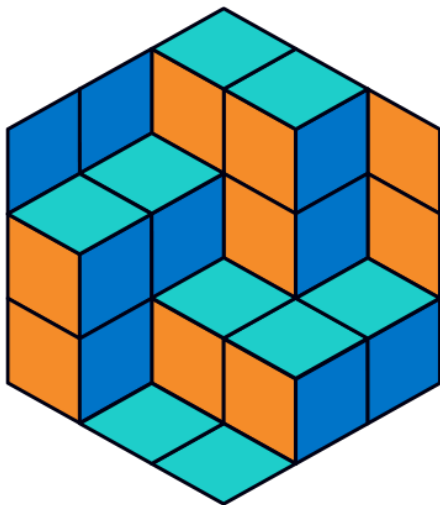
- (1) числа не строго убывают в строках и
- (2) строго не строго убывают в столбцах.

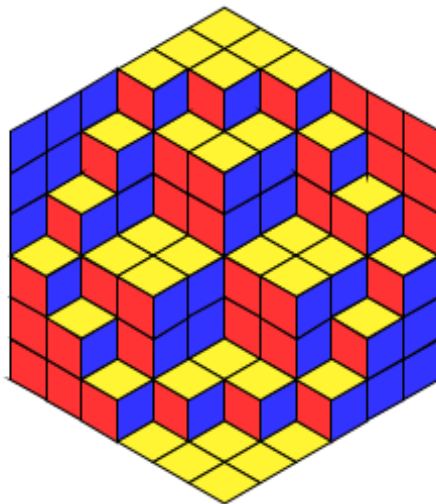
1	1	
3	1	
3	2	2

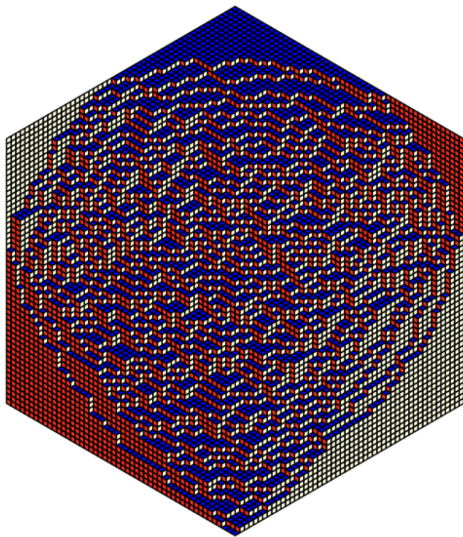
Рис.: Плоское разбиение

1	1	
3	1	
3	2	2









Theorem

Количество диаграмм Юнга внутри прямоугольника $n \times m$ равно

$$\binom{n+m}{n} = C_{n+m}^n.$$

Theorem

Количество диаграмм Юнга внутри прямоугольника $n \times m$ равно

$$\binom{n+m}{n} = C_{n+m}^n.$$

Theorem

Количество плоских разбиений внутри параллелепипеда $n \times m \times k$ равно

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{i+j+k-1}{i+j-2}.$$

Спасибо!